Taylor-Reihen

Definition. Es sei $f(x)$ beliebig oft differenzierbar auf einem offenen Intervall I. Die unendliche Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

heißt Taylor-Reihe von $f(x)$ mit dem Zentrum (oder Entwicklungspunkt) x_0.
Die Taylorsche Formel (Wiederholung). Wenn $f(x)$ auf einem offenen Intervall I $(n+1)$-Mal differenzierbar ist, dann ist sie auf I darstellbar in der Form

$$f(x) = T_{n,f}(x) + R_{n,f} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

$x, x_0 \in I$, $\xi \in (x_0, x)$, als die Summe des Taylor-Polynomes n-ten Grades und des Restgliedes. So eine Stelle ξ existiert, aber kann nicht berechnet werden.
Satz. Sei $f(x)$ auf $I : (x_0 - a, x_0 + a)$ unendlich oft differenzierbar. $f(x)$ wird auf I durch die Taylor-Reihe dargestellt (d.h. $f(x)$ ist die Grenzfunktion oder Summe der Taylor-Reihe) genau dann, wenn das Restglied $R_{n,f} \to 0$, falls $n \to \infty$ für jedes $x \in I$, $\xi \in (x_0, x)$.
Man sagt, dass $f(x)$ um x_0 in Taylor-Reihe entwickelt ist. Im spezialfall, wenn $x_0 = 0$, spricht man über McLauren-Reihe. Der Beweis des Satzes ist offensichtlich.
Beispiel. Die Taylorsche Formel für $f(x) = \sin x$ um die Stelle $x_0 = 0$ sagt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_n,\ n = 2k+1, \quad R_n = \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},\ \xi \in (0, x).$$

Für jedes festgelegte x gilt $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, denn $|\sin^{(n+1)}(\xi)| \le 1$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Deshalb ist

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad -\infty < x < \infty,$$

d.h. der Konvergenzradius $R = \infty$.
Ähnlicherweise wird $f(x) = \cos x$ in Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ entwickelt.

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty,$$

d.h. der Konvergenzradius $R = \infty$.
Beispiel Die Taylor-Reihe von $f(x) = \mathrm{e}^x$ um $x_0 = 0$.
Die Koeffizienten des Taylor-Polynoms sind $\frac{(\mathrm{e}^x)^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$. Der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

wird aus dem Quotientenkriterium berechnet, wie folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x^n|} < 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}|x| < 1, \quad |x| < \lim_{n\to\infty}(n+1),$$

deshalb ist $R = \infty$, und die Grenzfunktion der Potenzreihe ist $\mathbf{e}^x$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty.$$

Beispiel. Eine weitere grundlegende Taylor-Reihe ist diejenige der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ um $x_0 = 0$. Die Funktion is unendlich oft differenzierbar, wenn $x \neq 1$.
Die Koeffizienten werden aus der Formel $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ berechnet.

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} |_{x=0}= 1; \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = 2(1-x)^{-3} |_{x=0}= 2; (2(1-x)^{-3})' = 2 \cdot 3(1-x)^{-4} |_{x=0}= 2 \cdot 3; \ldots$$

Die Taylor-Reihe ist deshalb $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ Das Konvergenzintervall wird mit dem Quotientenkriterium berechnet:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} < 1 \Rightarrow |x| < 1.$$

In diesem Intervall gilt, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Das ist die geometrische Reihe mit dem Quotient x. Der Konvergenzradius ist $R = 1$, d.h. das Konvergenzintervall ist $-1 < x < 1$. In den Randpunkten $x = 1$ und $x = -1$ (und natürlich ausserhalb des Intervalls) ist die Reihe divergent.
Approximation von Funktionenwerte mit der Taylor-Reihe.
Aufgabe. $\cos 0,2$ wird durch $T_6(x)$ mit Fehlerabschätzung approximiert.

$$\cos 0,2 \approx 1 - \frac{0,2^2}{2!} + \frac{0,2^4}{4!} - \frac{0,2^6}{6!}$$

Das ist eine Leibniz-Reihe, weil sie alternierend ist, und die Glieder im Absolutwert monoton gegen 0 streben. Deshalb ist der Fehler der Approximation kleiner als der Absolutwert des ersten weggelassenen Gliedes.

$$F < \frac{0,2^8}{8!} < \star \cdot 10^{-3}.$$

Der Fehler tritt an der dritten Dezimalstelle auf, also man berechnet die obige Summe mit drei Dezimalstellen.
Beispiel: Binomialreihe.
$f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $x_0 = 0$. Die Koeffizienten werden durch die Formel $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ berechnet.
Da $f^{(k)} = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - k + 1)(1 + x)^{\alpha-k}$ und $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - k + 1)$, deshalb $a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - k + 1)}{k!}x^k, \quad |x| < 1,$$

wo diese Taylor-Reihe absolut konvergent ist. Wir werden zeigen, dass das Konvergenzintervall tatsächlich $|x| < 1$ ist. Die Koeffizienten haben im Zähler k faktoren ab α um 1 abwärts, im Nenner k Faktoren ab 1 aufwärts, wie bei dem Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$, wo n und k natürliche Zahlen sind. Deshalb wird die folgende Abürzung eingeführt
Definition.

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - k + 1)}{k!}$$

So ist die Binomialreihe

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad |x| < 1.$$

Der Konvergenzradius wird mit dem Quotientenkriterium berechnet.

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k)}{(k+1)!} \right| \cdot \frac{|x|^{k+1}}{|x|^k} \cdot \left| \frac{k!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)} \right| < 1$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\alpha-k|}{k+1} |x| < 1 \Rightarrow |x| < 1, \quad R = 1.$$

Beispiel. Approximation von $\sqrt{10}$.
$\sqrt{10} = \sqrt{1+9} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}} = 3(1+\frac{1}{9})^{1/2}$ ist in der Form $(1+x)^\alpha$ geschrieben, wo $x = \frac{1}{9} < 1$ und $\alpha = \frac{1}{2}$. Deshalb $\sqrt{10} = \sum_{k=0}^{\infty} 3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{1}{9}\right)^k$.

$$\sqrt{10} = 3\left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!} \cdot \frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!} \cdot \frac{1}{9^2} + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!} \cdot \frac{1}{9^3} + \dots\right)$$

Das ist eine alternierende Leibniz-Reihe (auch absolut konvergent), und bei der Approximation mit der n-ten partiellen Summe der Fehler ist kleiner als der Absolutwert des $n+1$-ten Gliedes.

Methoden der Reihenentwicklung

1. Substitution.

1.1.

$$\cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - + \dots, \quad -\infty < 3x < \infty \Rightarrow R = \infty.$$

1.2.

$$f(x) = \frac{1}{1+3x}$$

ist die Summe der geometrischen Reihe mit dem Quotient $q = -3x$, deshalb

$$\frac{1}{1+3x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-3x)^k, \quad |-3x| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}, \quad R = \frac{1}{3}.$$

1.3.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ist auch die Grenzfunktion einer geometrischen Reihe mit dem Quotient $q = -x^2$. Deshalb

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad |-x^2| < 1 \Rightarrow R = 1.$$

2. Gliedweise Differentiation, bzw. Integration.

2.1.

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x_0 = 0$$

wird mit Hilfe der geometrischen Reihe in Potenzreihe entwickelt. Denn

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Die gliedweise Differentiation der geometrischen Reihe ergibt innerhalb des Konvergenzintervalls

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots, \quad |x| < 1.$$

2.2. $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$. Die Ableitung der Funktion ist eine geometrische Reihe mit dem Quotient $-x$.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad |x| < 1,$$

durch gliedweise Integration entsteht

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad |x| < 1.$$

In den Endpunkten des Konvergenzintervalls bekommen wir, dass falls $x = -1$, die Reihe divergiert, falls $x = 1$, die Reihe ist eine Leibniz-Reihe, also (nur bedingt) konvergent. Deshalb $\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ ist die Summe der alternierenden harmonischen Reihe.

2.3. Folgerung: Reiheneintwicklung von $f(x) = \ln x$ um die Stelle $x_0 = 1$. Da $\ln x = \ln(1 + (x-1))$,

$$\ln x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-1)^{k+1}}{k+1}, \quad |x-1| < 1,$$

die Reihe ist im Intervall $0 < x < 2$ absolut konvergent, bei $x = 2$ bedingt konvergent, sonst divergent.

2.4. Reihenentwicklung von $\arcsin x$ um $x_0 = 0$.

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ Durch die Substitution $x \to -x^2$, $\alpha \to -\frac{1}{2}$ wird in Binomialreihe entwickelt im Intervall $|-x^2| < 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}(-x^2) + \frac{-\frac{1}{2}(\frac{-3}{2})}{2!}(-x^2)^2 + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}(-x^2)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k x^{2k}$$

Durch gliedwese Integration

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1$$

2.5. Reihenentwicklung von $f(x) = \mathrm{arctg} x$ um $x_0 = 0$.

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad |x| < 1$$

ist eine geometrische Reihe mit dem Quotient $q = -x^2$. Durch gliedweise Integration

$$\mathrm{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots, \quad |x| < 1$$

. Für $x = 1$ ist die Reihe bedingt konvergent, deshalb

$$\mathrm{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Integration durch Reihenentwicklung.
Beispiel.

$$\int \mathrm{e}^{-x^2} dx = \int (1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + - \ldots) dx, \quad \infty < x < \infty$$

Hier wurde in der Taylor-Reihe von $\mathbf{e}^x$ die Substitution $x \to -x^2$ durchgeführt.