Integration über dreidimensionale Bereiche, das Volumenintegral.

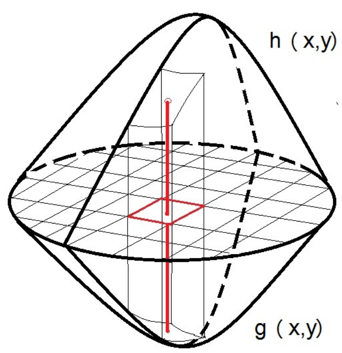
Das Riemann-Integral eines Skalarfeldes $f(x, y, z)$ über einen räumlichen Bereich B wird eingeführt. Der Bereich soll regulär sein, wie in der Definition angegeben.
Definition. Der dreidimensionaler Bereich ist regulär, wenn er den folgenden Bedingungen genügt
B ist beschränkt und nicht leer,
B ist abgeschlossen, d,h. er beinhaltet alle Randpunkte,
Der Rand von B besteht aus endlich vielen regulären (stetig differenzierbaren) Flächenstücken.
Bemerkung. Ein regulärer räumlicher Bereich hat immer ein Volumen.
Definition des Riemannschen Integral von $f(x, y, z)$ über B.
B sei ein regulärer räumlicher Bereich und $f(x, y, z)$ stetig über B. Der Bereich B wird durch regulären Schnittflächen auf Teilbereiche zerlegt. Für jede Zerlegung wird die Riemansche Summe definiert mit

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i,$$

wo (x_i, y_i, z_i) ein innerer Punkt im Teilbereich B_i liegt, und ΔV_i das Volumen des Teilbereiches B_i ist. Durch Verfeinerung der Zerlegung, falls $n \to \infty$ und der maximale Durchmesser $max(\delta_i)$ der Teilbereiche gegen Null strebt, entsteht eine Folge der Riemannschen Summen. Unter den Bedigungen ist diese Folge konvergent, und der Grenzwert nennt man das Volumenintegral oder Dreifachintegral der Funktion $f(x, y, z)$ über dem Bereich.

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max(\delta_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i,$$

dV ist das Volumenelement.
Die Eigenschaften des Volumenintegrals sind Linearität, Monotonie und Additivität, wie bei dem Doppelintegral, und der Mittelwertsatz gilt ähnlicherweise.
Das Volumenintegral in kartesischen Koordinaten über einem 3D-Normalbereich.



1. ábra. Dreidimensionaler Normalbereich.

Wenn der Bereich einen Querschnitt (nicht unbedingt horizontal) hat, und unten von der Fläche $g(x, y)$, oben von $h(x, y)$ berandet ist mit $g(x, y) \leq h(x, y)$, und die senkrechte Strecke zwischen den Schnittpunkten der z-Koordinatenlinie mit diesen Randflächen zu jedem Punkt des Querschnittes ganz im B liegt, dann heißt der

Bereich Normalbereich bezüglich z. In diesem Fall wird eine "säulenförmige" Zerlegung mit zu den Koordinatenebenen parallelen Schnittebenen konstruiert, wo jedes Stäbchen noch in der z-Richtung aufgeteilt wird. So ist das Volumen eines Teilbereiches $dV = dx \cdot dy \cdot dz$.

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iint\limits_{B'} \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

B' ist die Projektion des Bereiches B, d.h. die Projektion des Querschnittes in der xy Ebene. Das Doppelintegral über den ebenen Bereich B' wird aufgelöst entweder auf Integration nach $dx\,dy$ oder $dy\,dx$.
Im Bild 1 ist ein 3D-Normalbereich mit der "säulenförmiger" Aufteilung gezeigt, wobei die Stäbchen zu einem ebenen Teilbereich mit den Seitenlängen dx und dy noch in der z-Richtung zerlegt werden. So entstehen die Volumenelemente, deren Menge den 3D-Normalbereich, d.h. den angegebenen Körper approximiert. Ein Volumenelement hat die Höhe dz.
Das Volumenintegral stellt die Gesammtbelegung des Skalarfeldes über B dar. Wenn das Skalarfeld z.B die Punktweise gemessene Temperatur beschreibt, werden diese Werte über B summiert.
Die Gesammtmasse ist durch das Volumenintegral dargestellt, wenn die Massendichtefunktion $\mu(x,y,z)$ über B integriert wird:

$$M = \iiint\limits_B \mu(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

Der Spezialfall $f(x,y,z) \equiv 1$. Das Volumen des 3D-Bereiches B ist durch das Integral

$$V = \iiint\limits_B dV$$

dargestellt. Das Volumen ist positiv, wenn der Bereich ganz im Halbraum $z \geq 0$ liegt.
Der Spezialfall, wenn alle Integrationsgrenzen konstant sind. Dann gilt der Satz von Fubini, d.h. die Integrationsreihenfolge ist vertauschbar.
Beispiel. Man berechne den geometrischen Schwerpunkt des Tetraeders, das durch die Koordinatenebenen und die Ebene $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ $(a > 0,\, b > 0,\, c > 0)$ begrenzt ist. Die Achsenschnitte dieser Seitenfläche sind a, b und c.
Die Koordinaten des geometrischen Schwerpunktes sind

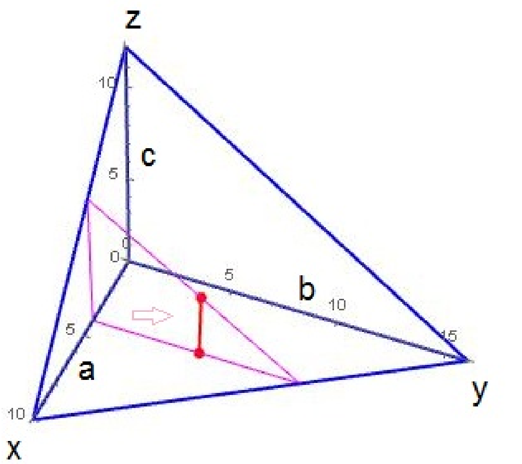
$$\bar{x} = \frac{\iiint_B x\,dV}{V},\ \bar{y} = \frac{\iiint_B y\,dV}{V},\ \bar{z} = \frac{\iiint_B z\,dV}{V},$$

wo V das Volumen des Körpers ist, und in den Zählern Momente bezüglich der Koordinatenebene stehen.
Das Volumen wird elementar berechnet: $V = \frac{abc}{6}$.
Die Integrationsreihenfolge sei dz, dy, dx. Zuerst wird ein ebener Schnitt parallel zu der yz Ebene bei einem festgelegten x ausgefüllt (sehe im Bild 2).
Die senkrechte Strecke bei einem festgelegten Punkt (x,y) liegt zwischen der xy Ebene und der schrägen Seitenfläche. Diese Strecke wird in der y Richtung von der x Achse bis zur Basiskante geschoben so, dass das Dreieck in der senkrechten Schnittebene ausgefüllt ist. Zum Schluss wir das "elastische" Dreieck in der x Richtung zwischen 0 und a durchgeschoben.

$$B = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right),\ 0 \leq y \leq b\left(1 - \frac{x}{a}\right),\ 0 \leq x \leq a\}.$$

Wir berechnen die $\bar{z}$ Koordinate, dazu integrieren wir z über das Tetraeder.

$$\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b(1-\frac{x}{a})} \int_{z=0}^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} z\,dz\,dy\,dx = \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b(1-\frac{x}{a})} \frac{c^2}{2}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 dy\,dx = \frac{c^2}{2} \int_{x=0}^{a} \left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^3 (-b)\right]_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx$$



2. ábra. Integration über das Tetraeder.

$$= \frac{-bc^2}{6} \int_{x=0}^{a} -\left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 dx = \frac{bc^2}{6} \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^4 (-a) \right]_0^a = \frac{abc^2}{24}.$$

$$\bar{z} = \frac{abc^2}{24} \cdot \frac{6}{abc} = \frac{c}{4}.$$

Ähnlicherweise gilt

$$\bar{x} = \frac{a}{4}, \quad \bar{y} = \frac{b}{4}.$$

Integraltransformationen.
Eine Koordinatentransformation ist durch die Funktionen $(x, y, z) \to (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ angegeben. Diese werden in die Funktion $f(x, y, z)$ eingesetzt, so wird das Skalarfeld mit den neuen Koordinaten dargestellt. Das Volumenelement $V = dx\,dy\,dz$ wird nach der Formel

$$dV = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\,dv\,dw$$

berechnet, mit der Jacobi-Determinante

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} := Det \begin{pmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{pmatrix}, \; J \neq 0.$$

Wenn der reguläre Bereich in x, y, z Koordinaten B und in u, v, w Koordinaten U ist, dann für das stetige Skalarfeld f gilt die Transformationsformel

$$\iiint\limits_B f(x, y, z) dx\,dy\,dz = \iiint\limits_U f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\,dv\,dw.$$

Bemerkung. Die Koordinatentransformation des Doppelintegral in Polarkoordinaten kann mit Hilfe der Jacobi-Determinante durchgeführt werden. $(x, y) \to (r, \varphi)$ mit $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.

$$J = Det\begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r,$$

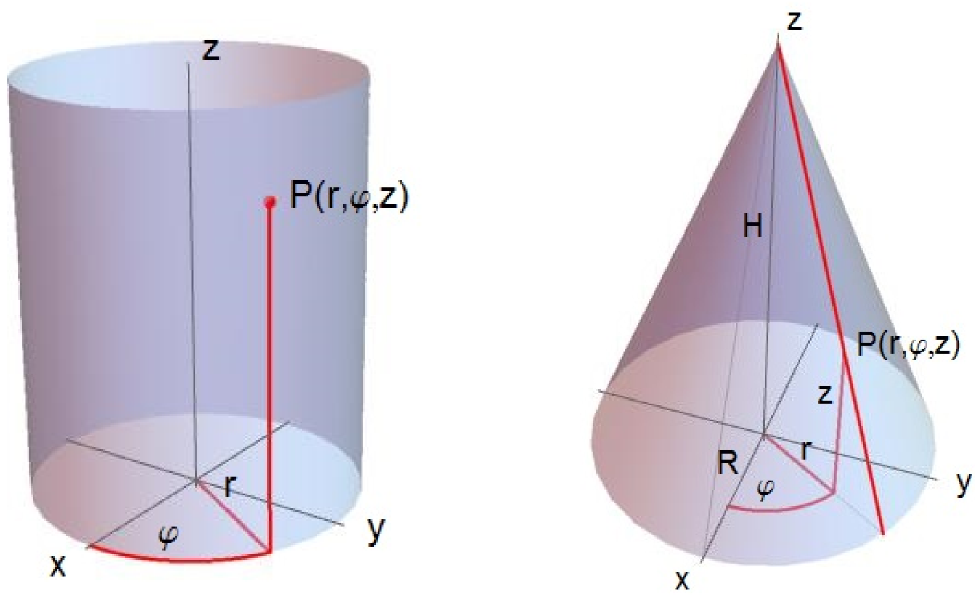
das Volumenelement ist $dV = r\,dr\,d\varphi$, wie das elementar gezeigt war.

Die Zylinderkoordinaten.

$$(x, y, z) \to (r, \varphi, z) \quad \text{mit} \quad x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z, \quad dV = r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

Der Keiszylinder mit dem Basiskreis in der xy Ebene mit Radius R und mit dem Spitzpunkt auf der z Achse in der Höhe H ist in Zylinderkoordinaten auf folgenderweise beschrieben Kreiszylinder $B = \{(r, \varphi, z) : 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le H\}$. Das Volumen wird mit dem Volumenintegral $\iiint_B dV$ berechnet

$$V = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R r\,dr\,d\varphi\,dz = R^2\pi H.$$



3. ábra. Zylindrische Koordinaten.

Beispiel. Gefragt ist das axiale Trägheitsmoment bezüglich z des Rotationskegels mit Basiskreis von Radius R und Höhe H (sehe im Bild 3).

Das axiale Trägheitsmoment bezüglich z des 3D-Bereiches B ist in kartesischen Koordinaten mit dem Dreifach-integral $\iiint_B (x^2 + y^2)\,dV$ ausgedrückt.

Der Kegel wird durch Rotation der Mantellinie in der xz Ebene erzeugt. Die Mantellinie hat die Gleichung $z = -\frac{H}{R}x + H$. Die Rotationsfläche ist durch $z = -\frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2} + H$ beschrieben. Die Transformation in Zylinderkoordinaten lautet: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$. Der Integrationsbereich des Rotationskegels in Zylinderkoordinaten ist $B = \{(r, \varphi, z) : 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le -\frac{Hr}{R} + H\}$, das Trägheitsmoment ist

r^2. Das Volumenintegral in Zylinderkoordinaten ist

$$\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{R}\int\limits_{z=0}^{-\frac{Hr}{R}+H} r^3\,dz\,dr\,d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{R}(-\frac{r^4H}{R}+r^3H)\,dr\,d\varphi$$

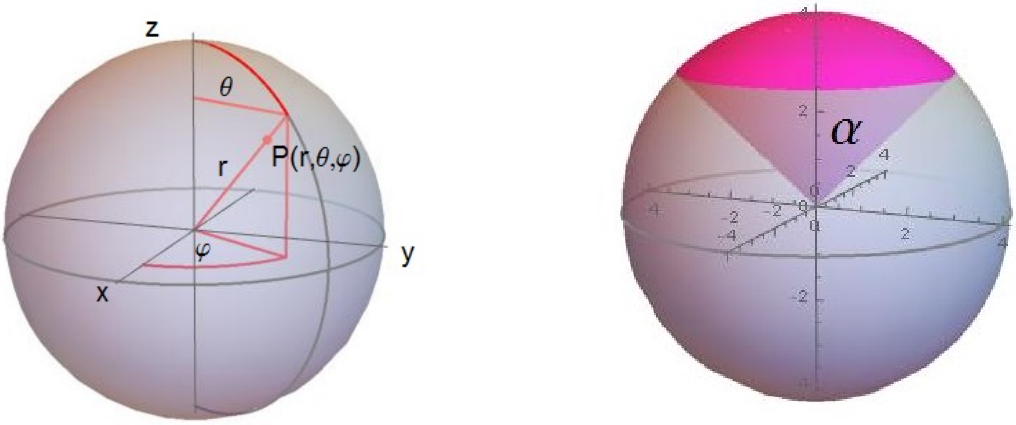
$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{r^5H}{5R}+\frac{r^4H}{4}\right]_0^R d\varphi = \int_0^{2\pi}(-\frac{R^4H}{5}+\frac{R^4H}{4})\,d\varphi = \frac{1}{10}R^4H\pi.$$

Kugelkoordinaten.
Die Abbildung

$$(x,y,z)\to(r,\vartheta,\varphi) \quad \text{mit} \quad x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi,\ z=r\cos\vartheta$$

definiert die Kugelkoordinaten auch räumliche Polarkoordinaten genannt.
Der 3D-Bereich der Kugel mit Radius R ist $B=\{(r,\vartheta,\varphi):\ 0\le r\le R,\ 0\le\vartheta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$.
Das Volumenelement mit der Jacobi-Determinante

$$|J| = \left| Det\begin{pmatrix} x'_r & x'_\vartheta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\vartheta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\vartheta & z'_\varphi \end{pmatrix}\right| = r^2\sin\vartheta, \quad dV = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi.$$



4. ábra. Kugelkoordinaten und der Kugelsektor.

Das Volumen der Halbkugel mit dem Radius R ist in Kugelkoordinaten mit dem Dreifachintegral $\iiint_B dV$ berechnet.

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{R} r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = \frac{R^3}{3}2\pi.$$

Beispiel. Das Volumen des Kugelsektors.
Der Kugelsektor ist der Durchschnitt eines Rotationskegels mit dem Halböffnungswinkel α und einer Kugel mit dem Radius a (sehe im Bild 4). Dieser 3D-Bereich in Kugelkoordinaten

$B = \{(r, \vartheta, \varphi) : \; 0 \le r \le a, \; 0 \le \vartheta \le \alpha, \; 0 \le \varphi \le 2\pi\}$. Das Volumen wird mit dem Dreifachintegral $\iiint_B dV$ berechnet, wo die Integrationsgrenzen konstant sind.

$$\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\alpha} \int\limits_{r=0}^{a} r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{\alpha} \frac{a^3}{3} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{3} \cos\alpha \, d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\alpha).$$