

TÉRGEOMETRIAI BEVEZETÉS

1. Térelemek

- pont (0-dimenziós); jelölése: A, B, C, \dots
- egyenes (1-dimenziós); jelölése: a, b, c, \dots
- sík (2-dimenziós); jelölése: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

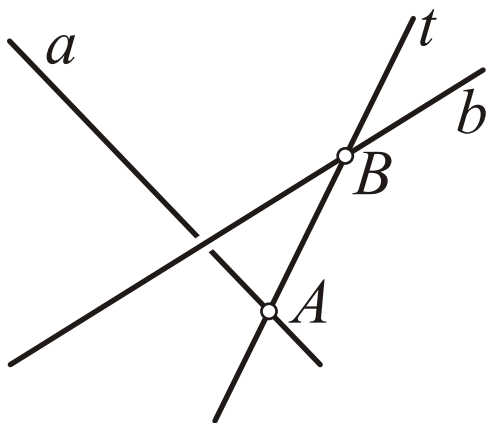
2. A sík megadása alacsonyabb dimenziós térelemekkel

A síkot meghatározza:

- három nem egy egyenesre illeszkedő (nem kollineáris) pont;
- egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont;
- két párhuzamos egyenes;
- két metsző egyenes.

3. Térelem-párok kölcsönös helyzete

- a. Két egyenes** lehet *párhuzamos*, *metsző* vagy *kitérő*.
- Egy **párhuzamos** vagy **metsző** egyenespár egy síkot határoz meg: **egysíkúak**.
 - **Kitérő** egyenespár esetén nincs olyan sík, amely a két egyenest tartalmazza (torz egyenespár).



a és b kitérő egyenesek, $A \in a$ és $B \in b$ az egyenesek tetszőleges pontjai.

Ekkor a $t = AB$ egyenes metszi a -t és b -t is: t az a és b kitérő egyenesek egy **transzverzálisa**. Az AB szakaszt **transzverzális szakasznak** is mondjuk.

b. Egyenes és sík kölcsönös helyzete.

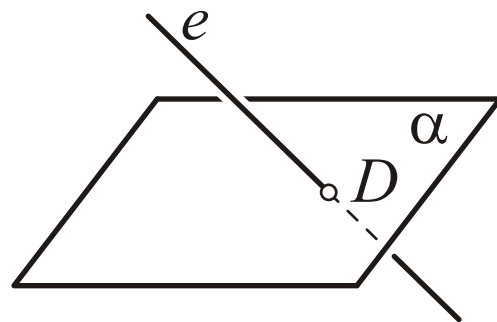
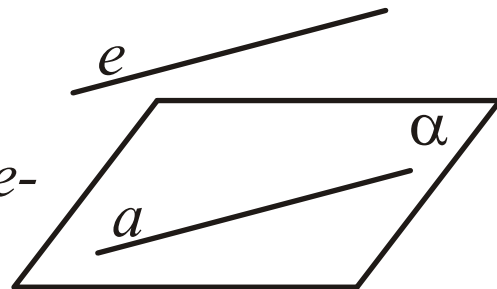
– Ha nincs közös pontjuk, (definíció szerint) *párhuzamosnak* mondjuk őket.

Állítás: Egy egyenes pontosan akkor párhuzamos egy síkkal, ha a sík tartalmaz az adott egyenessel párhuzamos egyenest.

$$e \parallel \alpha \Leftrightarrow \exists a \subset \alpha: e \parallel a$$

– Ha egyetlen közös pontjuk van, metszik egymást (a metszéspontot *dőféspontnak* is mondhatjuk): $D = e \cap \alpha$.

– Ha két közös pontjuk is van, akkor az egyenes minden pontja a síkon van, az egyenes *illeszkedik a síkra*: $e \subset \alpha$.



c. Két sík kölcsönös helyzete.

– Ha nincs közös pontjuk, (definíció szerint) párhuzamosnak mondjuk őket.

Állítás: Két sík pontosan akkor párhuzamos, ha az egyikben található két egymást metsző egyenes, amelyek mindkettlen párhuzamosak a másik síkkal.

$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \exists e, f \subset \alpha$ metszők:

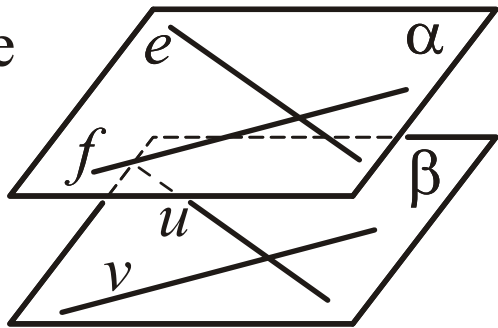
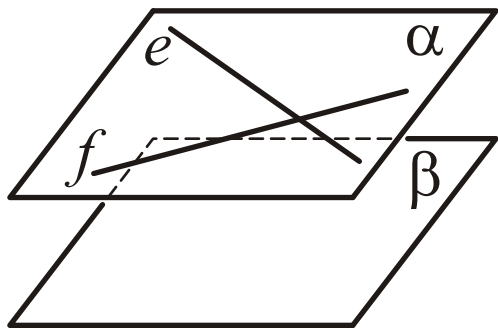
$e \parallel \beta \wedge f \parallel \beta$

Az előző (b) pontot is figyelembe

véve: $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \exists e, f \subset \alpha$

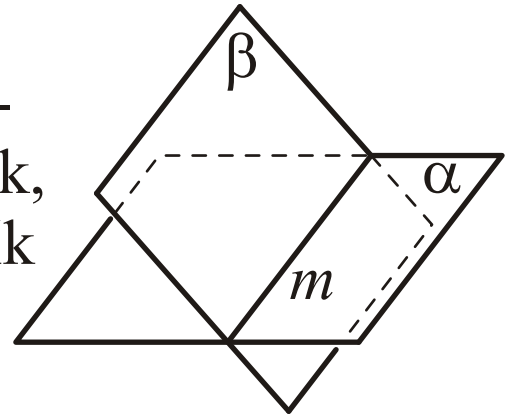
$\wedge \exists u, v \subset \beta$ metsző egyenes-

párok: $e \parallel u \wedge f \parallel v$.



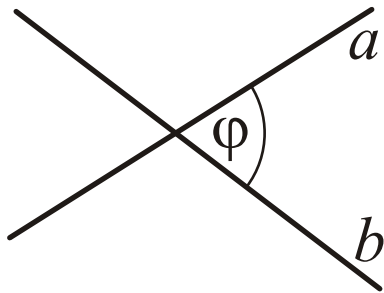
- Ha két (különböző) síknak van egy közös pontja, akkor végtelen sok közös pontjuk is létezik, amelyek egy egyenest, a két sík *metszésvonalát* alkotják:

$$m = \alpha \cap \beta.$$



4. Térelemek hajlásszöge

- a. **Metsző egyenesek szöge.** A két egyenes az általuk meghatározott síkot négy szögtartományra osztja, amelyek közül az egymással szemköztiek (a csúcsszögek egyenlősége miatt) egybevágók.



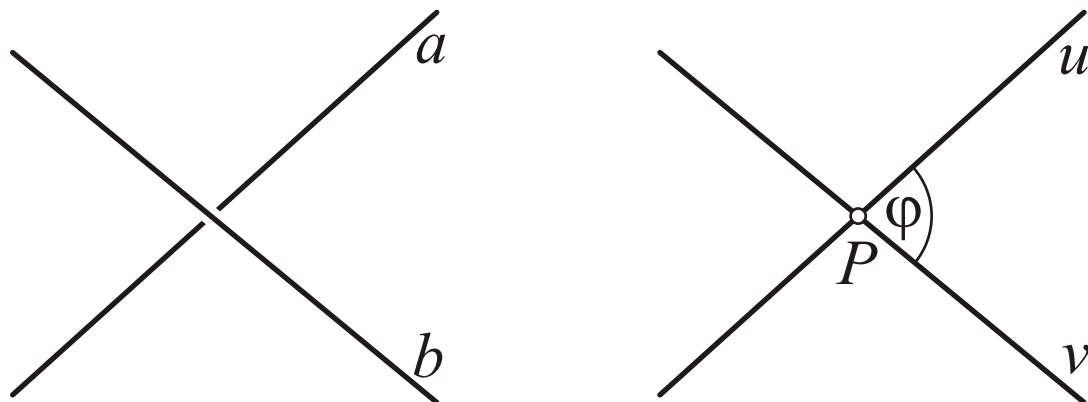
Ekkor a két egyenes szögét a kisebb mértékű (90° -nál nem nagyobb) tartomány mértéké-
ként definiáljuk:

$$(a, b)_\angle = \varphi \leq 90^\circ$$

Ha két egyenes szöge 90° , akkor az egyeneseket merőlegesnek mondjuk ($a \perp b$).

A további hajlásszögek értelmezését erre az esetre vezetjük vissza.

b. Kitérő egyenesek szöge.



A tér egy tetszőleges P pontján át az a és b kitérő egyenesekkel párhuzamos u és v egyeneseket veszünk, és ezen metsző egyenesek szögeként értelmezzük a és b szögét:

$$P \text{ tetszőleges, } P \in u \parallel a, P \in v \parallel b,$$

$$(a, b)_{\angle} = (u, v)_{\angle} = \varphi.$$

Az egyállású szögek tétele miatt, ez a definíció független P megválasztásától.

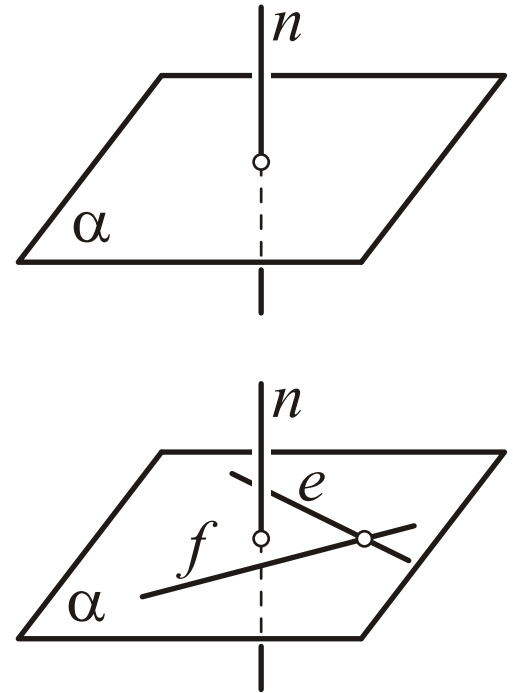
c. Egyenes és sík merőlegessége.

Egy egyenes (definíció szerint) merőleges egy síkra, ha merőleges annak minden egyenesére: $(n \perp \alpha)$

Állítás: *Egy egyenes pontosan akkor merőleges egy síkra, ha található a síkban két egymást metsző egyenes, amelyek merőlegesek rá. $n \perp \alpha \Leftrightarrow \exists e, f \subset \alpha$ metszők: $n \perp e \wedge n \perp f$*

Állítás: *Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor*

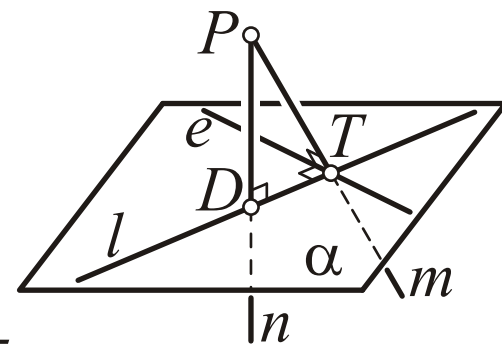
- a vele párhuzamos egyenesek mindegyike is merőleges rá: $n \perp \alpha \wedge e \parallel n \Rightarrow e \perp \alpha$;*
- az egyenes merőleges a síkkal párhuzamos bármely másik síkra is: $n \perp \alpha \wedge \varepsilon \parallel \alpha \Rightarrow n \perp \varepsilon$.*



- Így egy egyenes meghatározza a rá merőleges síkokat (azok állását), és fordítva, egy sík meghatározza a rá merőleges egyeneseket (azok állását).
- Egy adott síkra merőleges egyenest *a sík normálisának* is szokás nevezni.

Állítás (három merőleges tétele):

Legyen adott egy sík és a síkban egy egyenes, továbbá (a síkon kívül) egy pont. Tekintsük a pontból a síkra és az egyenesre bocsátott egy-egy merőleget. Akkor az ezek talppontját összekötő egyenes is merőleges az adott egyenesre:



Akkor az ezek talppontját összekötő egyenes is merőleges az adott egyenesre:

$$e \subset \alpha, (P \notin \alpha) \wedge P \in n \perp \alpha, D = n \cap \alpha$$

$$\wedge P \in m \perp e, T = m \cap e (T \in \alpha) \Rightarrow l = DT \perp e.$$

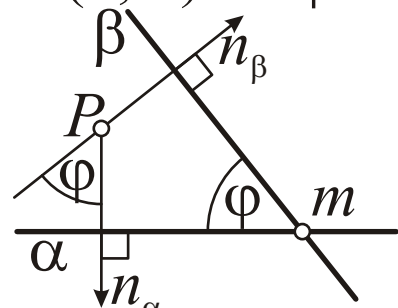
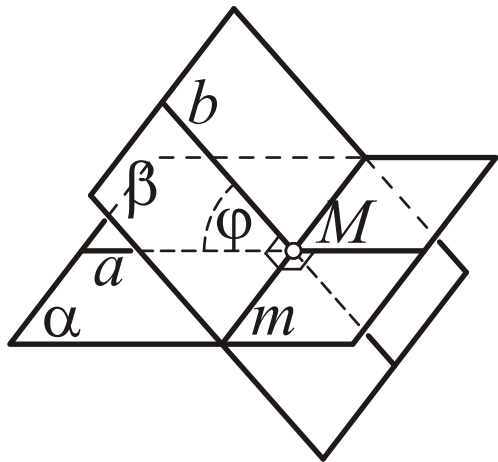
d. Síkok hajlásszöge.

Ha a két sík nem metszi egymást, akkor párhuzamosak, és így a hajlásszögük 0.

Ha a síkok metszik egymást, akkor *a metszésvonalra egy tetszőleges pontján át merőlegest állítunk mindkét síkban, és ezek szögével értelmezzük a síkok hajlásszögét: $m = \alpha \cap \beta$, $M \in m$; $M \in a \subset \alpha$, $a \perp m$; $M \in b \subset \beta$, $b \perp m$; $(\alpha, \beta)_\perp = (a, b)_\perp = \varphi$.*

A metszésvonal irányából nézve látható, hogy a síkok normálisainak szöge megegyezik a síkok szögével (merőleges szárú hegyesszögek):

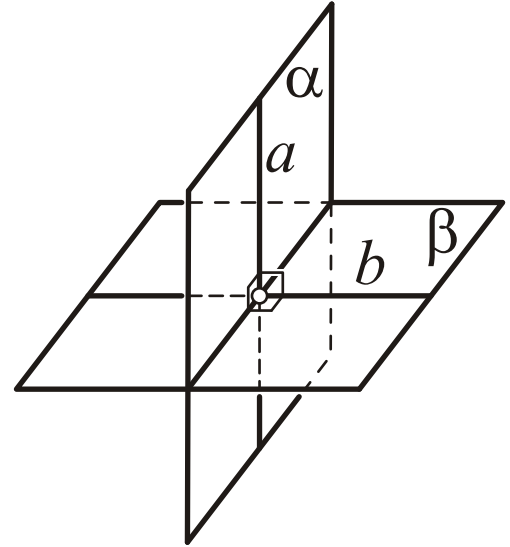
P tetsz; $P \in n_\alpha \perp \alpha$, $P \in n_\beta \perp \beta$; $(\alpha, \beta)_\perp = (n_\alpha, n_\beta)_\perp = \varphi$.



Állítás: *Két sík pontosan akkor merőleges egymásra, ha egyikük tartalmaz a másikra merőleges egyenest.*

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \exists a \subset \alpha: a \perp \beta$$

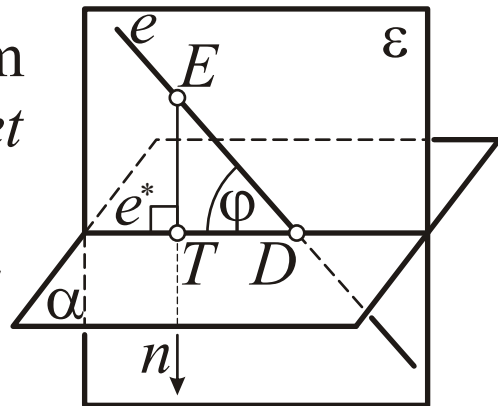
Következmény: Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor az egyenesen átfektetett bármely sík is merőleges rá.



e. Egyenes és sík hajlásszöge.

Ha az egyenes nem metszi a síkot, akkor párhuzamosak, és így a hajlásszögük 0.

Ha az egyenes metszi a síkot, és nem merőleges rá, akkor *hajlásszögüket az egyenesnek és a síkra eső merőleges vetületének szögével értelmezzük.*



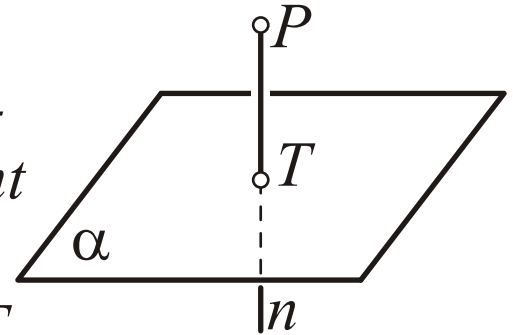
A merőleges vetületet például az egyenes egy pontjából a síkra bocsátott merőleges talppontja és a síkon lévő dőféspont határozza meg.

$D = e \cap \alpha$, $E \in e$ ($E \neq D$) tetszőleges, $E \in n \perp \alpha$, $T = n \cap \alpha$, $e^* = DT$; $(e, \alpha)_{\perp} = (e, e^*)_{\perp} = \varphi$.

Az ábra alapján – az ETD derékszögű háromszögből – adódik, hogy *a hajlásszög az egyenes és a sík normálisa által bezárt szög pótszöge*: $\varphi = 90^{\circ} - (e, n)_{\perp}$

5. Térelemek távolsága

- a. Pont és sík távolsága** *a pont és a pontból a síkra bocsátott merőleges talppontjának távolságaként értelmezhető:*



$$P \in n \perp \alpha, \quad T = n \cap \alpha; \quad P\alpha = PT.$$

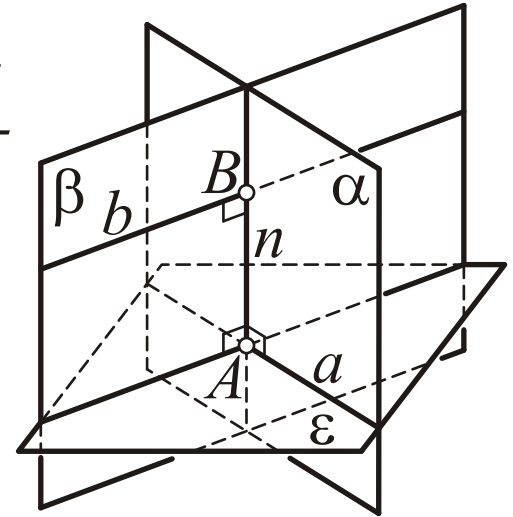
- b. egyenes és sík távolsága** 0, ha van közös pontjuk, egyébként pedig, ha párhuzamosak, az egyenes egy tetszőleges pontjának és a síknak a távolsága lesz, ami független a pont megválasztásától.
- c. két sík távolsága** 0, ha van közös pontjuk (metszik egymást, vagy egybeesnek), egyébként pedig, ha párhuzamosak, az egyik sík egy tetszőleges pontjának és a másik síknak a távolsága lesz, ami most is független a pont megválasztásától.

d. Kitérő egyenesek távolsága.

Állítás: *Két kitérő egyenesnek egyértelműen létezik olyan transzverzális, amelyen a transzverzális szakasz hossza minimális.*

Ez a transzverzális a két egyenes *normáltranszverzális*.

Állítás: *A normáltranszverzális mindkét egyenest merőlegesen metszi.*



Az a és b egyenesek normáltranszverzálisának előállításához föl vesszük az a -n átfektetett, b -vel párhuzamos ε síkot. Ekkor az a -n és b -n átfektetett ε -ra merőleges α és β síkok metszéspontjaként kapjuk az n normáltranszverzálisat.

A két egyenes távolsága a normáltranszverzális-szakasz hossza: $ab = \varepsilon b = AB$.

6. Térgeometriai szerkesztések

Elvi megállapodások a síkban megszokott szerkesztési lépések térbeli általánosítására:

- a. *Ha adott három, nem egy egyenesre illeszkedő pont, akkor az általuk meghatározott síkot is adottnak tekintjük.* Tehát 3d-vonalzóval (elvileg) megrajzolhatjuk a pontokon átfektetett síkot, ahogy síkbeli szerkesztés során két pontot összekötő egyenest megrajzolhatunk egy szokásos vonalzóval.
- b. *Ha adott két metsző sík, akkor metszésvonalukat is ismertnek tekinthetjük.* Tehát két sík metszésvonalát hasonlóképpen kijelölhetjük, mint ahogyan egy síkbeli szerkesztés során két metsző egyenes közös pontját is kijelölhettük.

c. *Ha adott egy sík, akkor abban a (megengedett) síkbeli szerkesztések elvégezhetőek.* Ez a megállapodás teremt kapcsolatot az **a** és **b** pontokban leírt lépések és a szokásos síkbeli szerkesztési lépések között.

Így elvi szinten (ábrázolásmódtól függetlenül) gondolhatjuk végig a térgeometriai feladatok megoldását. Az egyes ábrázolási módokban pedig az **a**, **b** és **c** pontokban leírt lépéseket implementálva, ténylegesen is megoldhatjuk a feladatokat.

A kétképsíkos ábrázolás esetében például az **a** pottal összhanban adottnak tekintjük a térelemekkel meghatározott síkot. Kidolgozunk egy eljárást két tetszőleges sík metszésvonalának szerkesztésére, ezzel megvalósítva a **b** pontot. Végül egy tetszőleges síkot képsíkkal párhuzamos helyzetbe transzformálva (v. leforgatva) a síkbeli szerkesztések is elvégezhetőek lesznek **c** szerint.