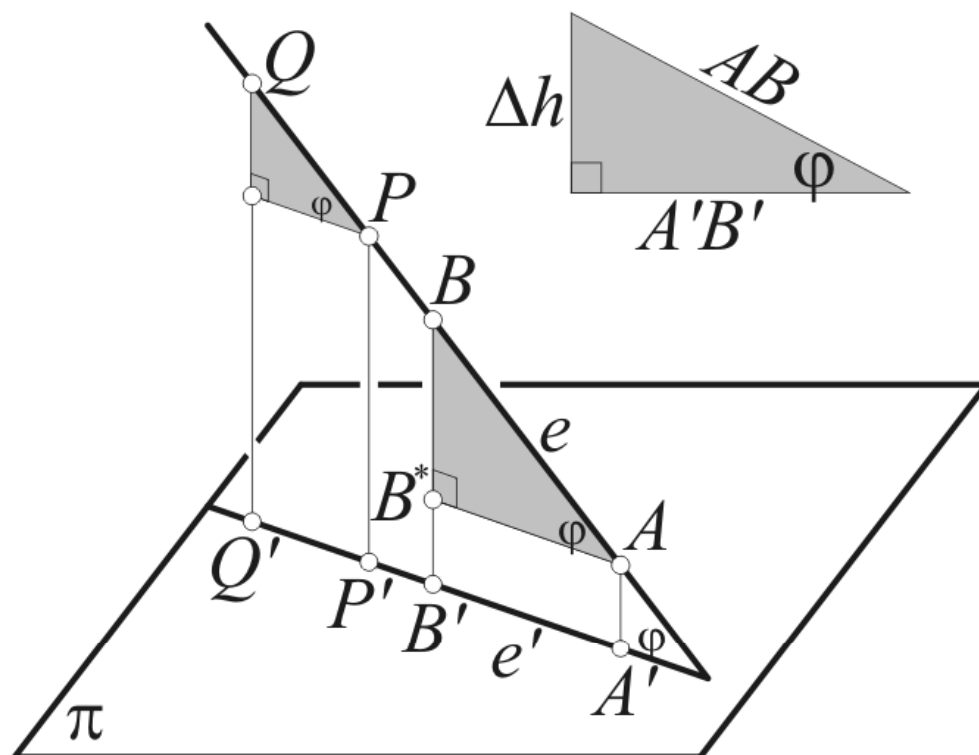


Méretes alapszerkesztések

1. Két pont távolsága, és távolság felmérése félegyenesre



Az AB szakasz $A'B'$ vetületét párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy az A' végpont A -ba kerüljön.

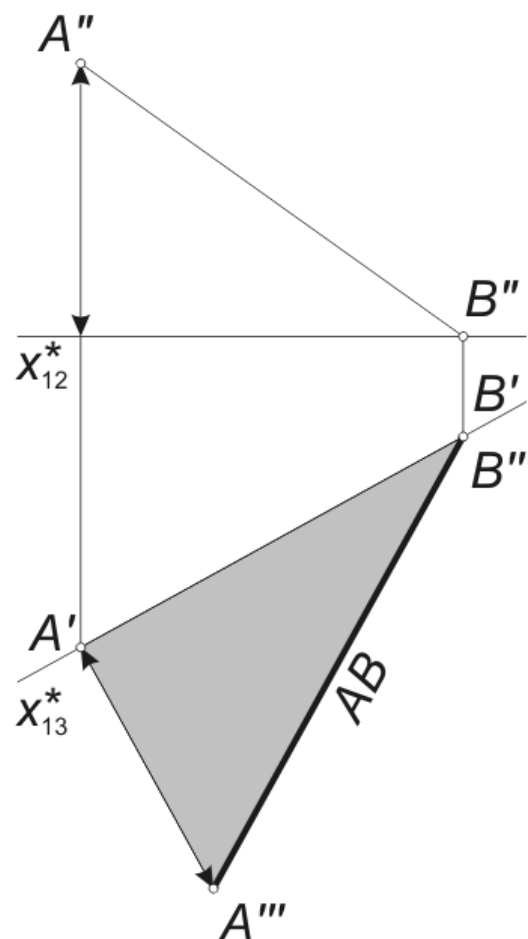
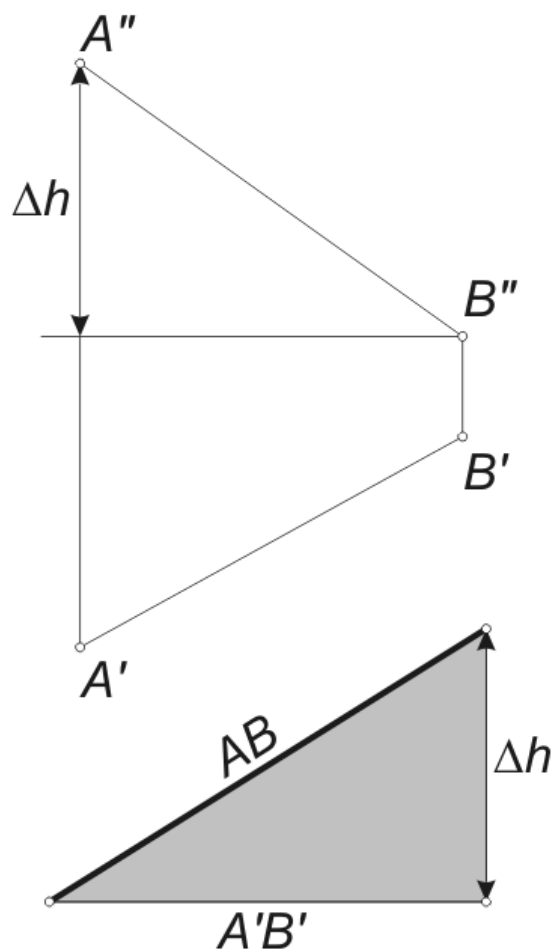
Az így adódó AB^*B derékszögű háromszöget **az AB szakasz** (π képsíkra vonatkozó) **különbségi háromszögének** nevezzük.

A függőleges befogó hossza Δh , az A és B végpontok π -től mért távolságának különbsége (magasságkülönbség).

A különbségi háromszög A -nál lévő szöge megegyezik a szakasz e tartóegyenesének a π képsíkkal bezárt φ szögével.

Ugyanazon egyenesre illeszkedő szakaszok különbségi háromszögei hasonlóak.

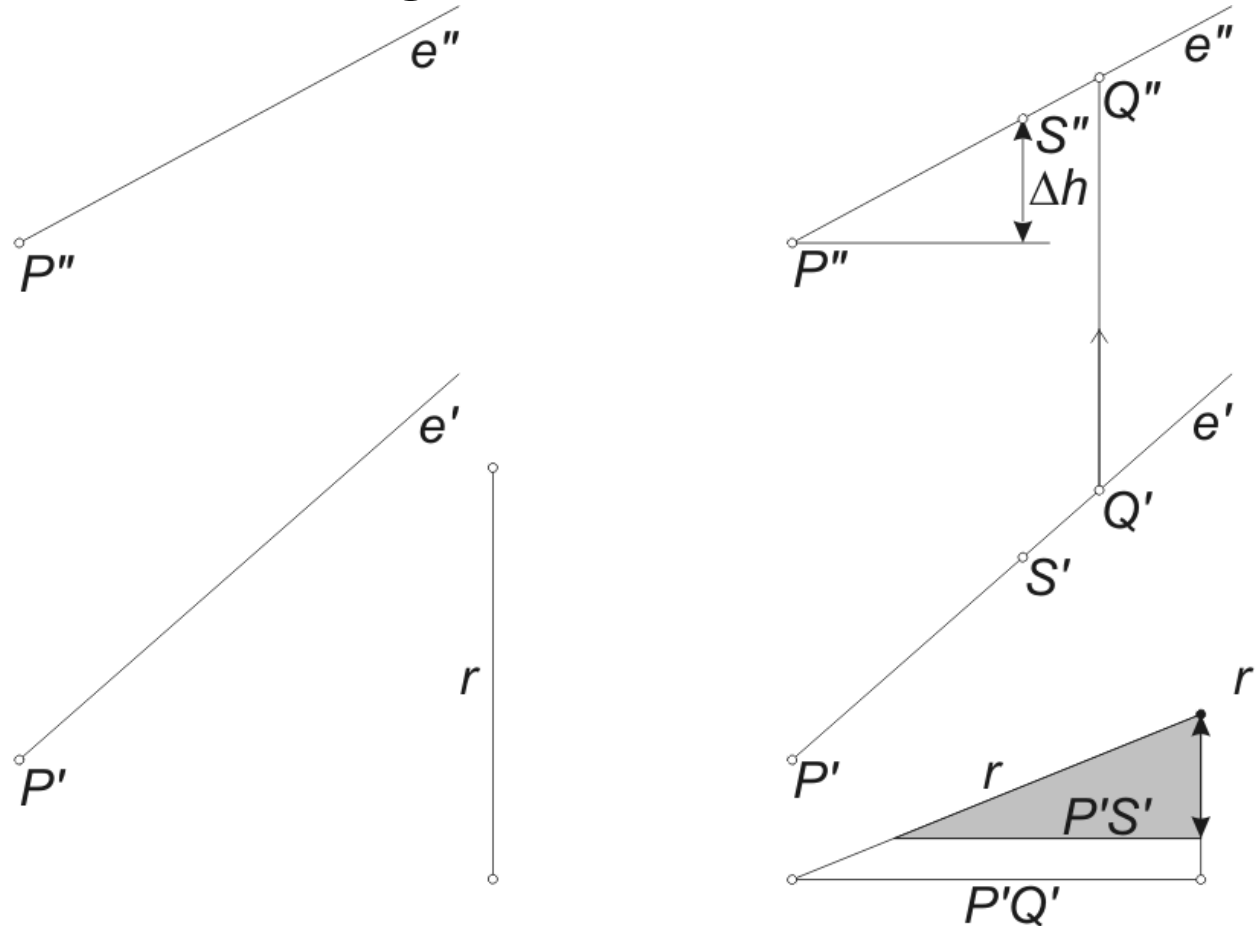
1.a. Két pont távolságának szerkesztése



Az A és B pontok távolságának meghatározásához elkészítjük az AB szakasz (I. képsíkra) vonatkozó különbségi háromszögét. A vízszintes befogó hossza $A'B'$, a függőleges befogó hossza pedig A és B magasságkülöbsége, amit a II. képről olvashatunk le.

A szerkesztés képsík-transzformációval is megoldható, ha AB -t főegyenessé transzformáljuk ($x_{13} \parallel A'B'$, ill. azonos is lehet vele). Ekkor a szerkesztési területen jön létre a különbségi háromszög.

1.b. Távolság felmérésének szerkesztése



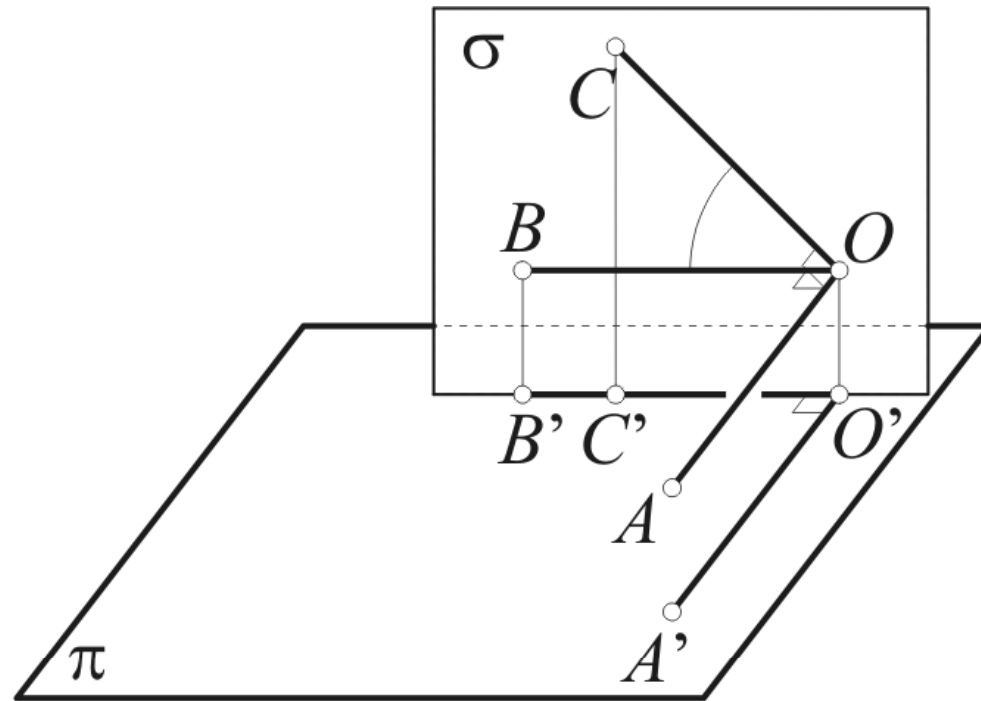
Keressük a P kezdőpontú e félegyenesre illeszkedő Q pontot, amelynek P -től mért távolsága r .

Kijelölünk egy (P -től különböző) tetszőleges S segédpontot a félegyenesen, és előállítjuk a PS szakasz különbségi háromszögét.

PQ különbségi háromszöge ehhez hasonló, de átfogójának hossza r . Így az eredeti háromszög átfogójának egyik végpontjából centrálisan nagyítunk (vagy kicsinyítünk).

Az új háromszög vízszintes befogója adja P' és Q' távolságát. (A függőleges befogó hossza pedig P és Q magasságkülönbsége.)

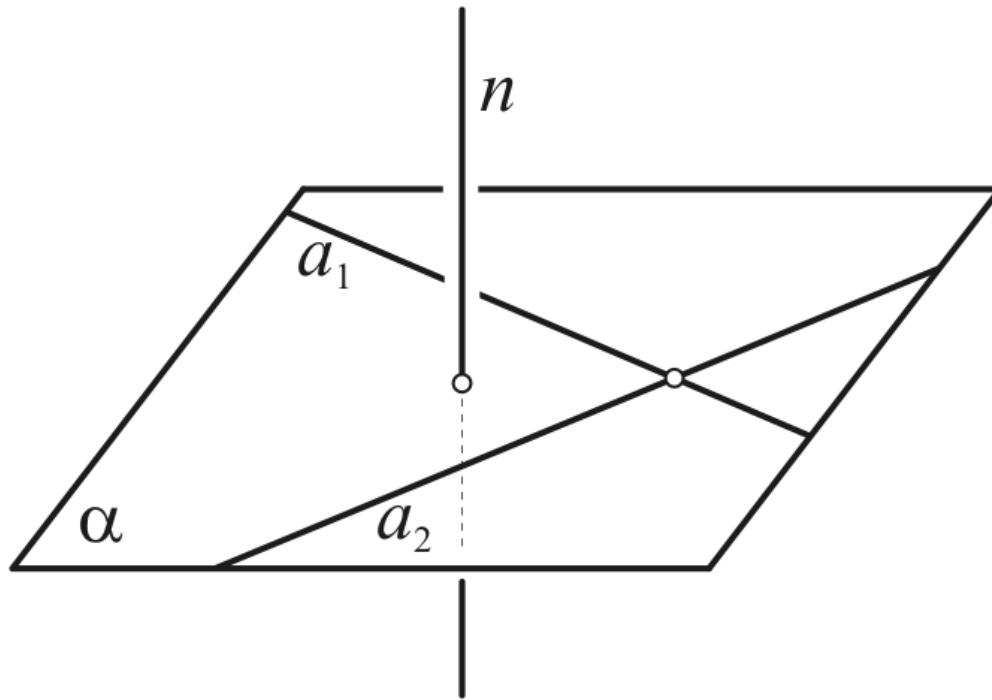
2. Egyenes és sík merőlegessége (1)



Ha egy derékszög egyik szára párhuzamos a képsíkkal, akkor merőleges vetülete is derékszög. Fordítva, ha egy szög egyik szára a képsíkkal párhuzamos, és merőleges vetülete derékszög, akkor maga a szög is derékszög.

Általánosabban, ha két (akár kitérő) egyenes közül az egyik főegyenes, a másik pedig nem vetítőegyenes, akkor merőlegességüknek szükséges és elégséges feltétele, hogy merőleges vetületük derékszöget alkosson.

2. Egyenes és sík merőlegessége (2)



Egy n egyenes pontosan akkor merőleges egy α síkra, ha α -ban található két egymást metsző a_1 és a_2 egyenes, amelyek mindkettlen merőlegesek n -re:

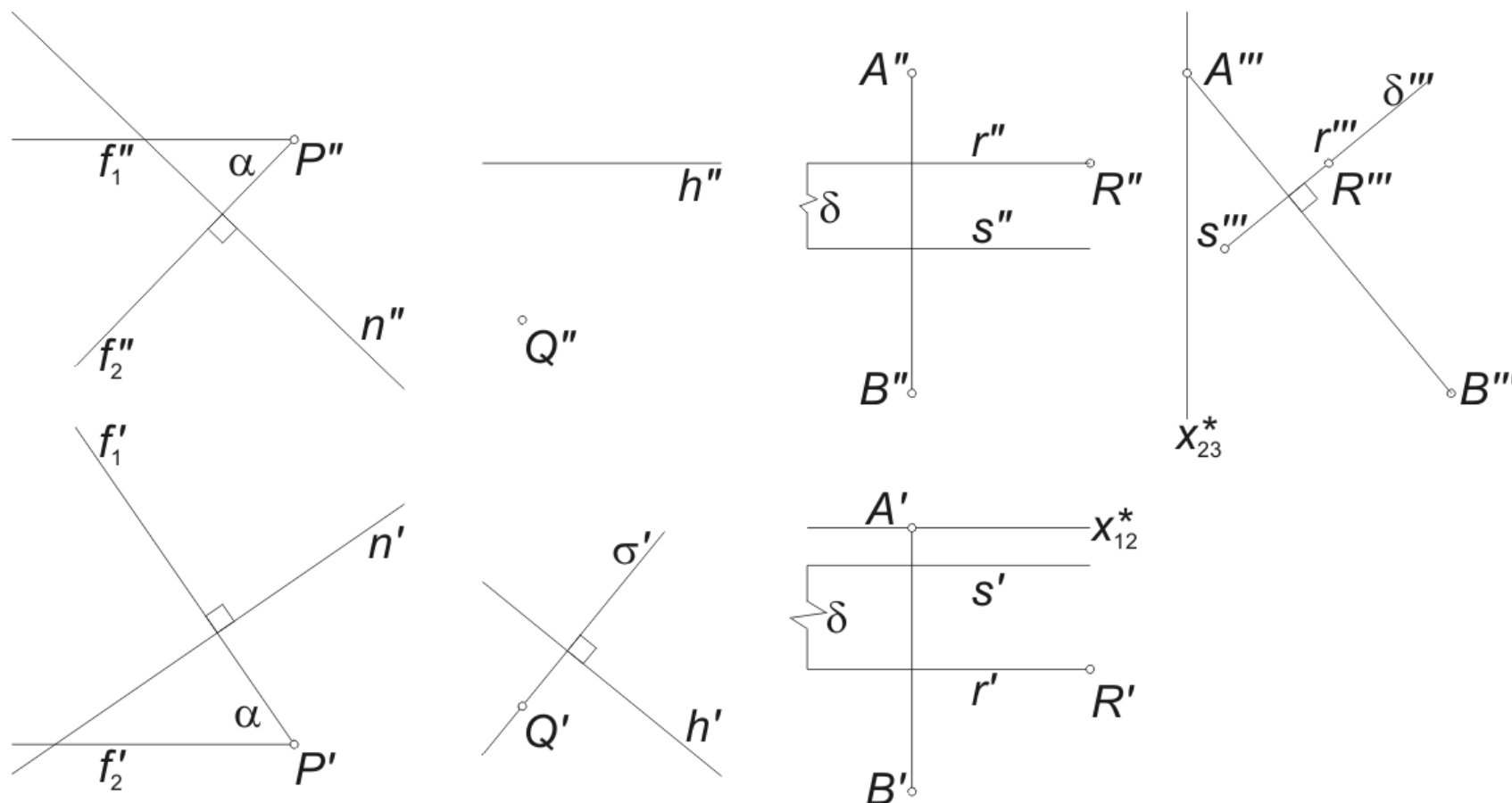
$$a_1 \perp n \text{ és } a_2 \perp n.$$

n az α sík egyik normálisa.

Kétképsíkös ábrázolásban egy egyenes pontosan akkor merőleges egy általános helyzetű síkra, ha I. képe merőleges a sík I. fővonalának I. képére, és II. képe merőleges a sík II. fővonalának II. képére.

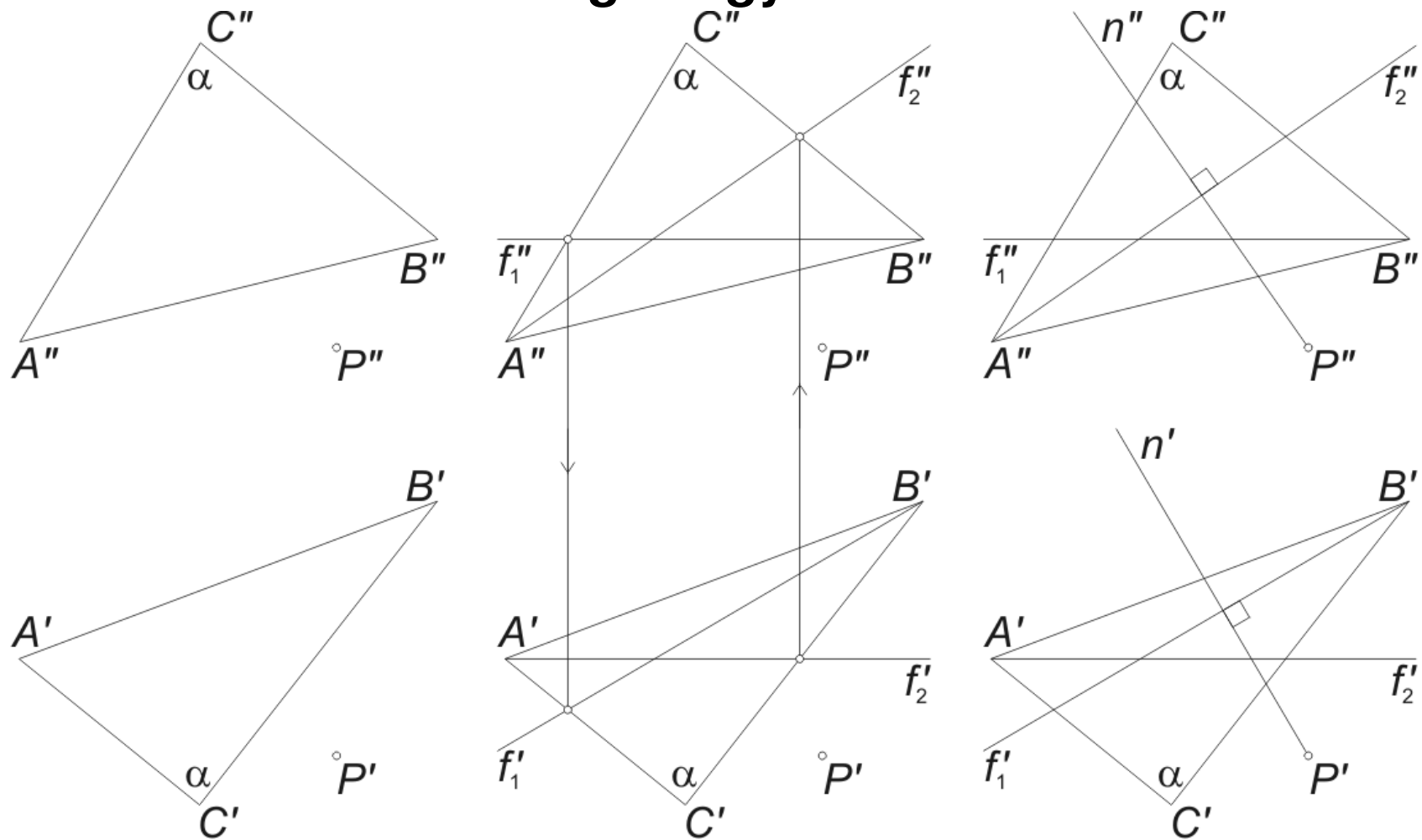
Vetítősíkra merőleges egyenes olyan főegyenes, amelynek képe merőleges a sík képére. Az x_{12} tengellyel párhuzamos (de nem vetítő helyzetű) sík normálisa pedig profilegyenes (szerkesztéséhez transzformáció szükséges).

2.a. Egyenesre merőleges sík felvétele



1. Keressük a P ponton áthaladó, n egyenesre merőleges α síkot. A sík fővonalait tudjuk fölvenni: $P' \in f_1' \perp n'$, $P'' \in f_2'' \perp n''$ ($P' \in f_2'$, $P'' \in f_1''$ a rendező irányra merőlegesek).
2. Keressük a Q ponton áthaladó h l. főegyenesre merőleges σ síkot: $\sigma' \perp h'$.
3. Vegyük föl az AB profilegyenesre merőleges R ponton átfektetett δ síkot. Az AB egyenst főegyenessé transzformálva ($x_{23} \parallel A''B''$) visszavezetjük a feladatot a 2. feladatban leírt esetre. δ -t az r és s párhuzamos egyenesekkel adtuk meg.

2.b. Síkra merőleges egyenes szerkesztése

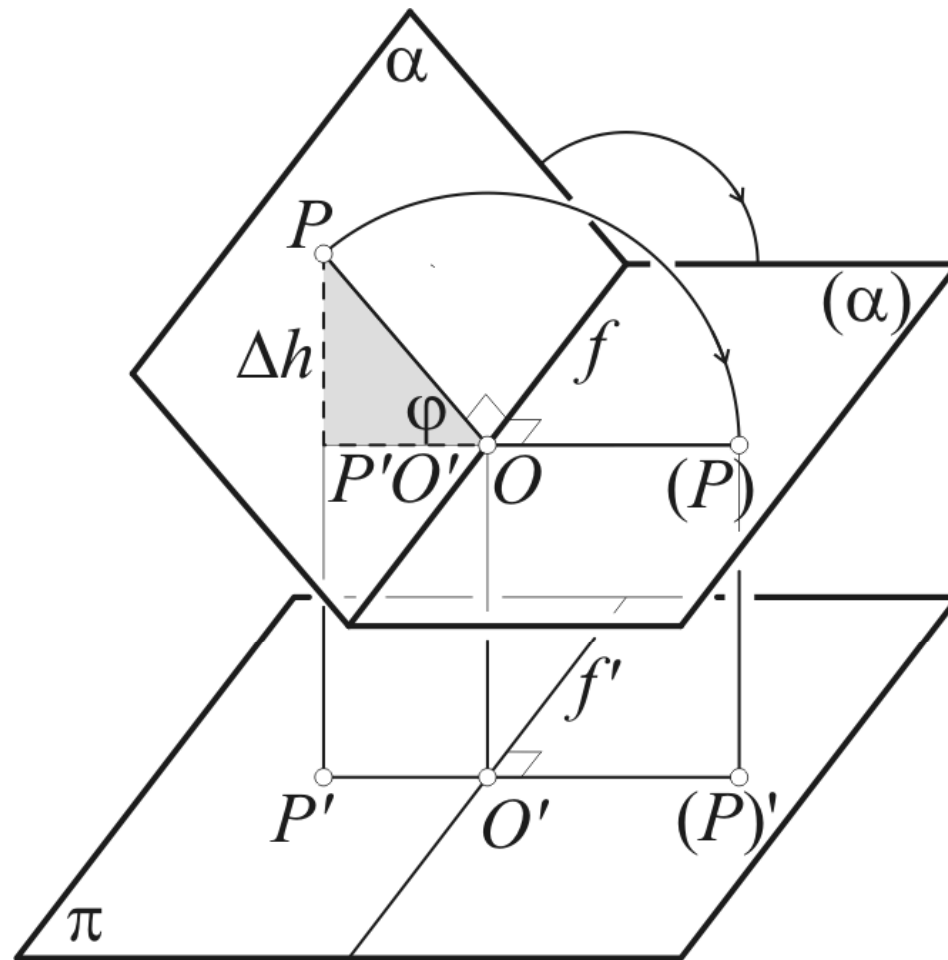


1. Szerkesszük meg az $\alpha = [A, B, C]$ síkra merőleges, a P ponton áthaladó n egyenes vetületeit.

Felvesszük α -nak egy I. és egy II. fővonalát, f_1 -et és f_2 -t.

Megrajzoljuk n vetületeit: $P' \in n' \perp f_1'$, $P'' \in n'' \perp f_2''$.

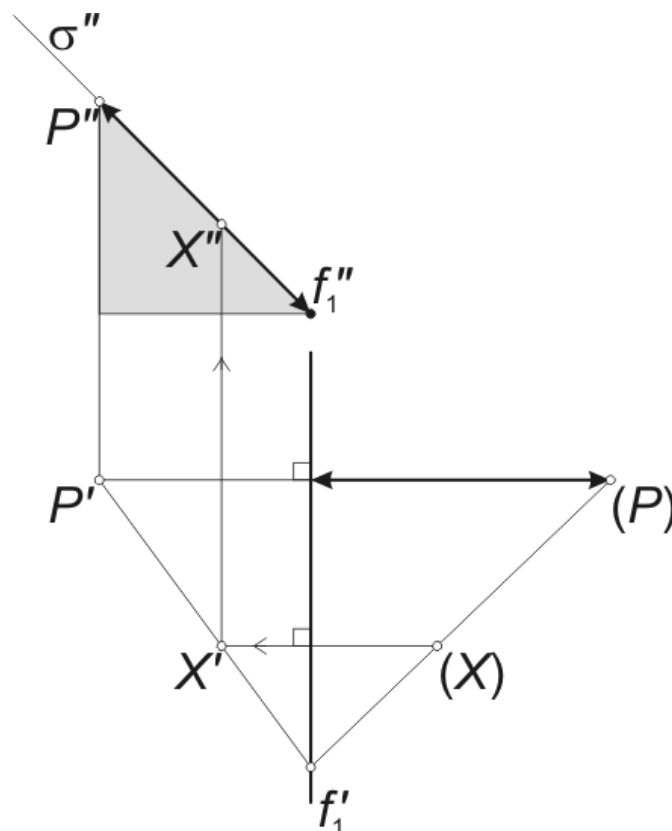
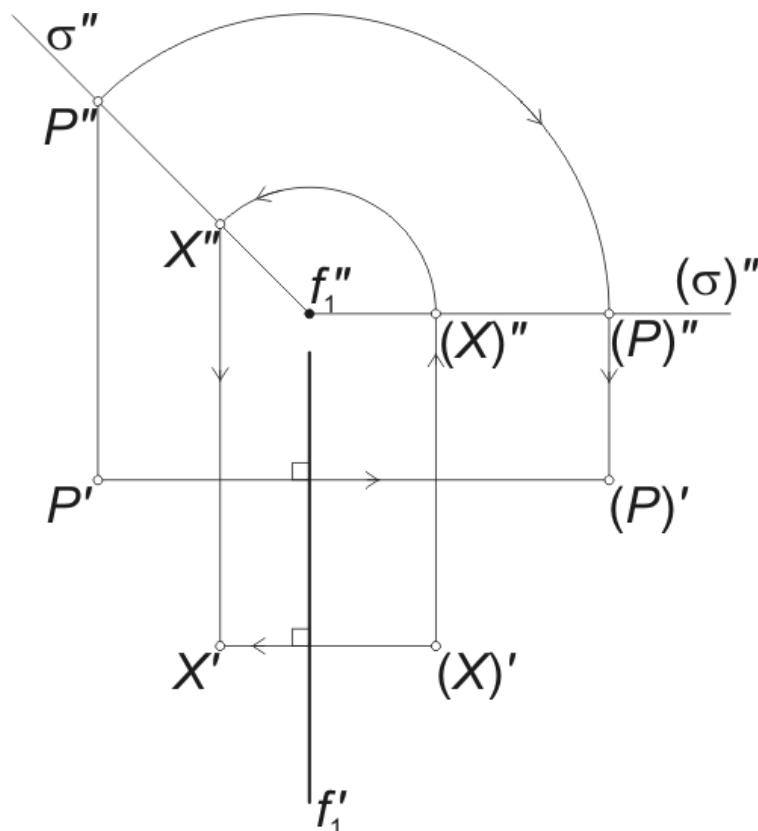
3. Sík forgatása képsíkkal párhuzamos helyzetbe és visszaforgatás



- Egy α sík leforgatása a π képsíkkal párhuzamos helyzetbe egy fővonala (pl. f) körül történhet.
- A sík egy P pontjának pályája olyan kör, amelynek síkja f -re merőleges, és O középpontja illeszkedik f -re.
- A leforgatás különbségi háromszögében a π -vel párhuzamos befogó P' és f' távolsága, a π -re merőleges befogó P és f magasságkülönbsége, az átfogó pedig P és f valódi távolsága.
- A háromszögben a π -vel párhuzamos befogónál lévő φ szög az α és π síkok szöge.

- Az α sík pontjainak az f körüli leforgatáshoz tartozó különbségi háromszögei hasonlóak.
- $P'(P)' \perp f'$ (pont képét és leforgatottjának képét a tengely vetületére merőleges egyenes köti össze); továbbá, $(P)'O' = PO$ a különbségi háromszög átfogója.

3.a. Vetítősík leforgatása



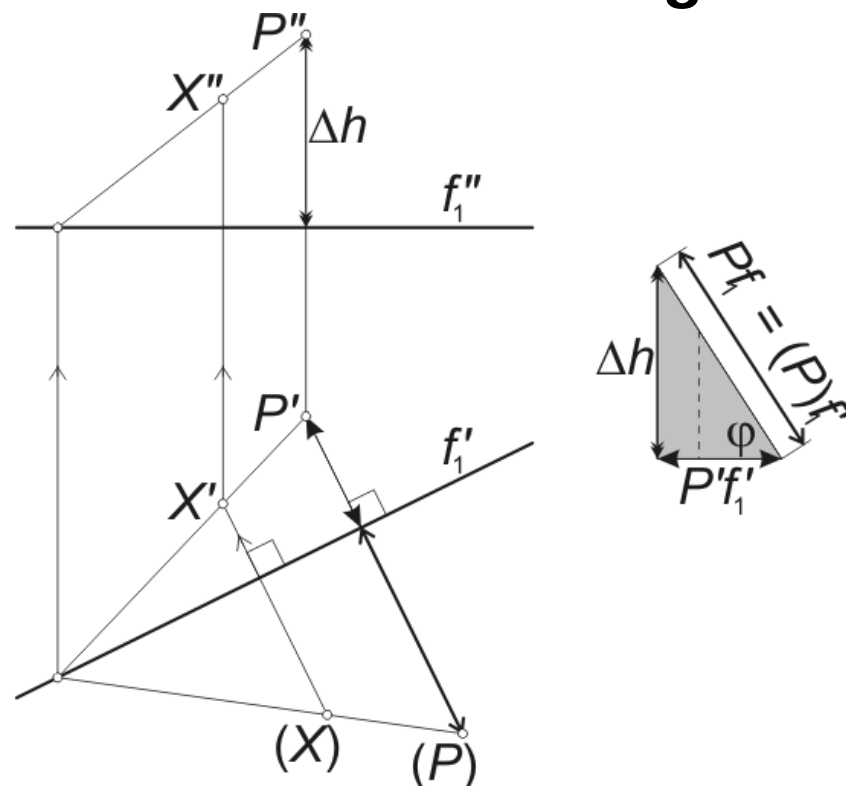
A σ II. vetítősíkot forgatjuk le f_1 I. fővonala (egyben II. vetítőegyenes) körül.

1. Leforgatjuk a sík P pontját. A forgatás köríve II. fősíkra illeszkedik. Ezt a II. képen megrajzolhatjuk, kijelölve $(P)''$ -t. Mivel $P'(P)'$ e körív I. képe, így ez merőleges f_1' -re.

Ha $(X)'$ a leforgatott síkon végzett valamely szerkesztés eredménye, keressük X vetületeit. $(X)''$ kijelölése után a visszaforgatás körívével adódik X'' . Ekkor X rendezőjének ismeretében kapjuk X' -t kihasználva, hogy $X'(X)'$ merőleges f_1' -re.

2. P leforgatásának közvetlenebb módja, ha kihasználjuk $P'(P)'$ és f_1' merőlegességét, valamint azt, hogy $(P)'$ és f_1' távolsága megegyezik P'' és f_1'' távolságával. $(X)'$ visszaforgatásakor pedig figyelembe vehetjük, hogy a $(P)'$ $(X)'$ egyenes f_1' -vel közös pontja fix.

3.b. Általános sík leforgatása

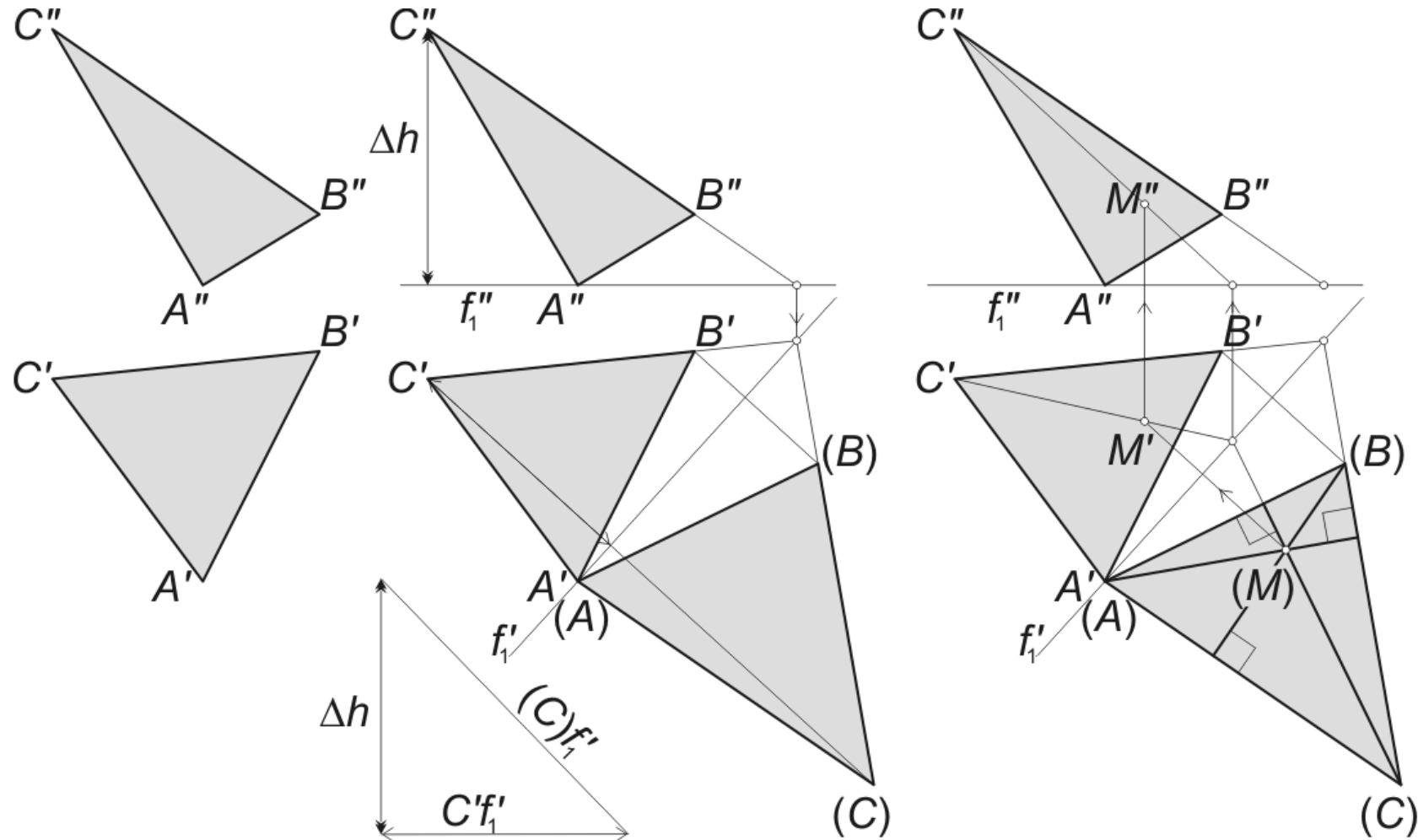


Az $\alpha = [P, f_1]$ (általános) síkot forgatjuk le f_1 I. fővonala körül.

1. A különbségi háromszög megszerkesztésével előállítjuk P és f_1 távolságát. A vízszintes befogó hossza P' és f_1' távolsága, a függőleges befogó pedig P és f_1 magasságkülönbsége. A keresett távolság az átfogó hossza. Ez lesz (P) és f_1' távolsága, amit az f_1' -re merőleges egyenesre (a leforgatási körív képére) kell felmérni.

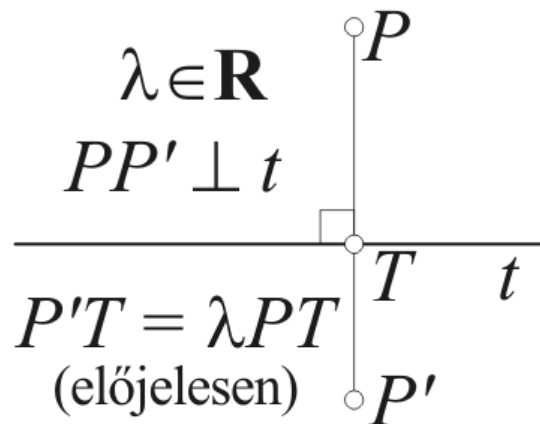
2. A leforgatott síkon végzett valamely szerkesztés eredményeként adódó (X) pont vetületeit keressük. A $(P)(X)$ egyenes f_1 forgástengellyel közös pontja a forgatás során helyben marad. Ezt P -vel összekötve a PX egyenest kapjuk (mindkét képen). Ezen már X kijelölhető (előbb X' , majd X''). Szükség esetén az X leforgatásához tartozó különbségi háromszög is használható, amely P -éhez hasonló.

3.c. Példa síkbeli szerkesztésre

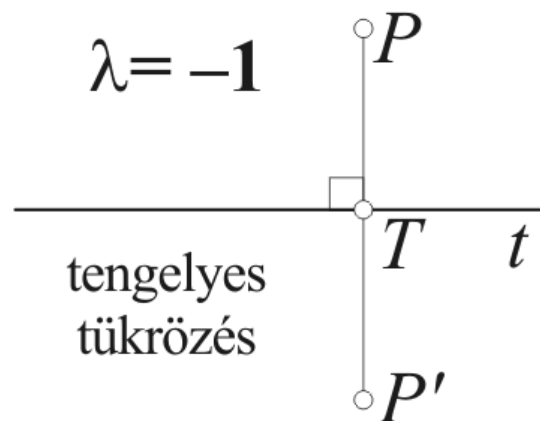


1. Szerkesszük meg az ABC háromszög M magasságpontjának vetületeit.
2. Fölvesszük a háromszög síkjának f_1 fővonalát A -n keresztül. és a háromszög síkját (a háromszöggel együtt) leforgatjuk körülötte.
3. A leforgatott háromszögben megrajzolhatjuk a magasságvonalakat, amelyeknek metszéspontjaként kapjuk az (M) magasságpont. Ezt például a $(C)(M)$ magasságvonala egyenesének segítségével visszaforgatjuk, előállítva a keresett M' és M'' vetületeket.

A merőleges tengelyes affinitás



• Adott a λ valós szám és a sík t egyenese. A sík egy tetszőleges P pontjához hozzárendeljük P' -t az alábbi módon: Jelölje T a P -ből t -re bocsátott merőleges talppontját. Legyen P' a PT egyenesnek az a pontja, amelyre $P'T = \lambda PT$ teljesül (a távolságokat előjelesen értve). A sík így értelmezett önmagára való leképezését a **t tengelyű λ arányú merőleges tengelyes affinitásnak** nevezzük.

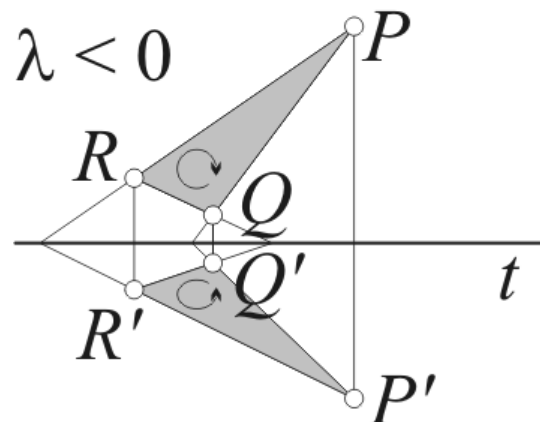


• Speciálisan:

$\lambda = 1$ esetén **identikus leképezés**;

$\lambda = 0$ esetén **merőleges vetítés t -re** (a sík képe t);

$\lambda = -1$ esetén **t -re vonatkozó tengelyes tükrözés**.

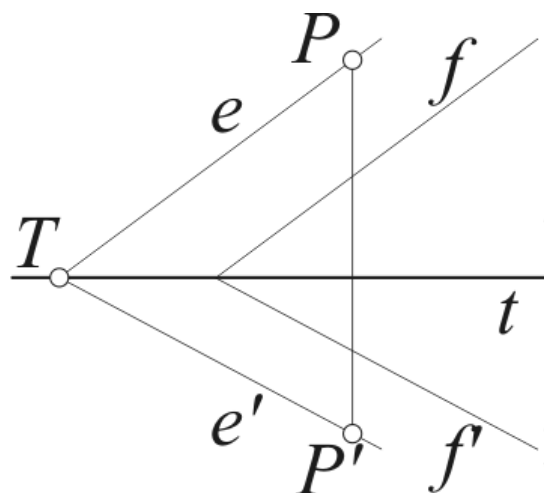


• Továbbá:

$\lambda > 0$ esetén **orientáció** (körüljárás) **tartó**,
 pont és képe a tengelynek ugyanazon oldalára esik;

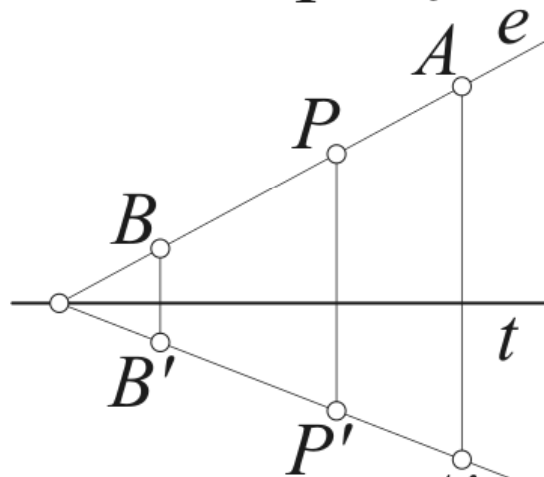
$\lambda < 0$ esetén **orientáció váltó**,
 pont és képe t különböző oldalán vannak.

A merőleges tengelyes affinitás tulajdonságai



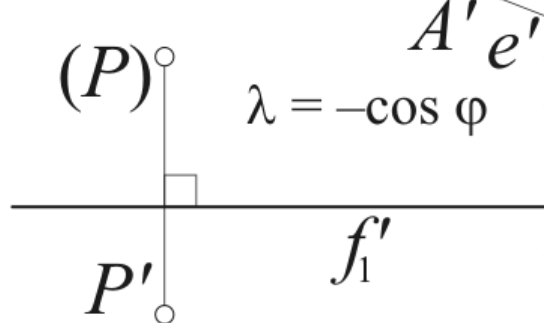
• **Egyenestartó és illeszkedéstartó.** A tengely pontjai fixek. Ha egy e egyenes metszi a t tengelyt egy T pontban, akkor e' is metszi t -t, mégpedig éppen T -ben.

• **Párhuzamosság-tartó.** Speciálisan, ha egy egyenes párhuzamos t -vel, akkor képe is párhuzamos vele.



• **Osztóviszonytartó.**

• **Nem aránytartó és nem szögtartó.** Kivéve a $\lambda = \pm 1$ esetet, amikor is egybevágóság (identitás vagy tükrözés), tehát távolság- és szögtartó.



$$\lambda = -\cos \varphi$$

Megjegyzés: Sík leforgatásakor a leforgatott kép és az I. kép kapcsolata is merőleges tengelyes affinitás, amelynek tengelye f_1' , aránya pedig $\lambda = \pm \cos \varphi$, ahol φ a leforgatott sík és a π_1 képsík hajlásszöge (a különbségi háromszög π_1 -gyel párhuzamos befogóján lévő szög):

$$P'f_1' = \lambda(P)f_1.$$