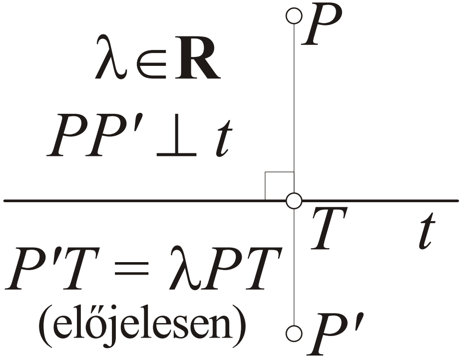
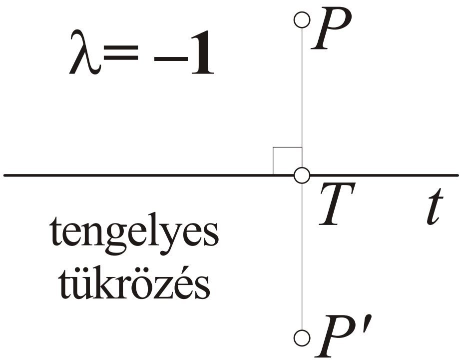
KÖRÁBRÁZOLÁS

1. Merőleges affinitás



• Adott a λ valós szám és a sík t egyenese. A sík egy tetszőleges P pontjához hozzárendeljük P'-t az alábbi módon: Jelölje T a P-ből t-re bocsátott merőleges talppontját. Legyen P' a PT egyenesnek az a pontja, amelyre $P'T = \lambda PT$ teljesül (a távolságokat előjelesen értve). A sík így értelmezett önmagára való leképezését a ***t tengelyű λ arárányú merőleges tengelyes affinitásnak*** nevezzük.

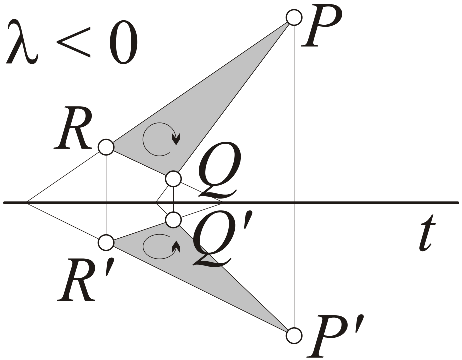


• Speciálisan:

$\lambda = \ \ 1$ esetén ***identikus leképezés;***

$\lambda = \ \ 0$ esetén ***merőleges vetítés t-re*** (a sík képe t);

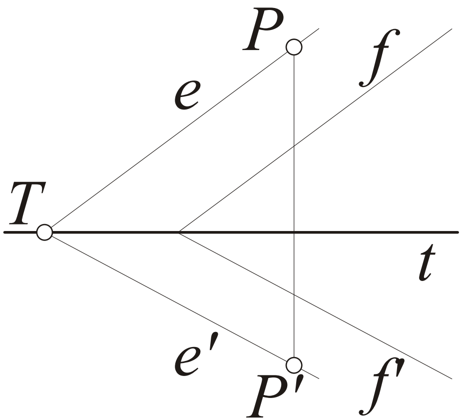
$\lambda = -1$ esetén ***t-re vonatkozó tengelyes tükrözés.***



• Továbbá:

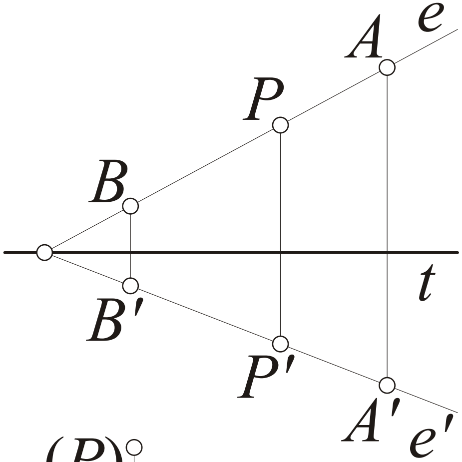
$\lambda > 0$ esetén ***orientáció*** (körüljárás) ***tartó,***
pont és képe a tengelynek ugyanazon oldalára esik;

$\lambda < 0$ esetén ***orientáció váltó,***



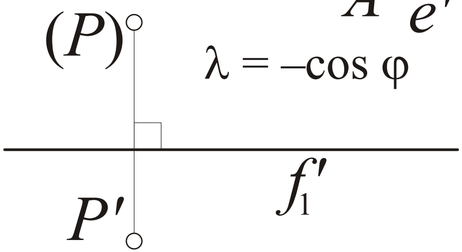
- ***Egyenestartó és illeszkedéstartó.*** A tengely ponjai fixek. Ha egy e egyenes metszi a t tengelyt egy T pontban, akkor e' is metszi t-t, mégpedig éppen T-ben.

- ***Párhuzamosság-tartó.*** Speciálisan, ha egy egyenes párhuzamos t-vel, akkor képe is párhuzamos vele.



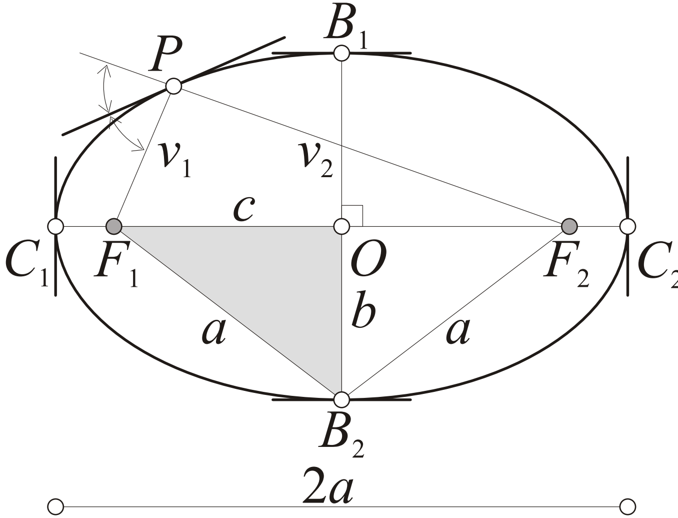
- ***Osztóviszonytartó.***

- ***Nem aránytartó és nem szögtató.*** Kivéve a $\lambda = \pm 1$ esetet, amikor is egybevágóság (identitás vagy tükrözés), tehát távolság- és szögtartó.



Megjegyzés: Sík leforgatásakor a leforgatott kép és az I. kép kapcsolata is merőleges tengelyes affinitás, amelynek tengelye f_1', aránya pedig $\lambda = \pm\cos\varphi$, ahol φ a leforgatott sík és a π_1 képsík hajlásszöge (a különbségi háromszög π_1-gyel párhuzamos befogóján lévő szög):
$P'f_1' = \lambda(P)f_1$.

2. Az ellipszis



$$b^2 + c^2 = a^2$$

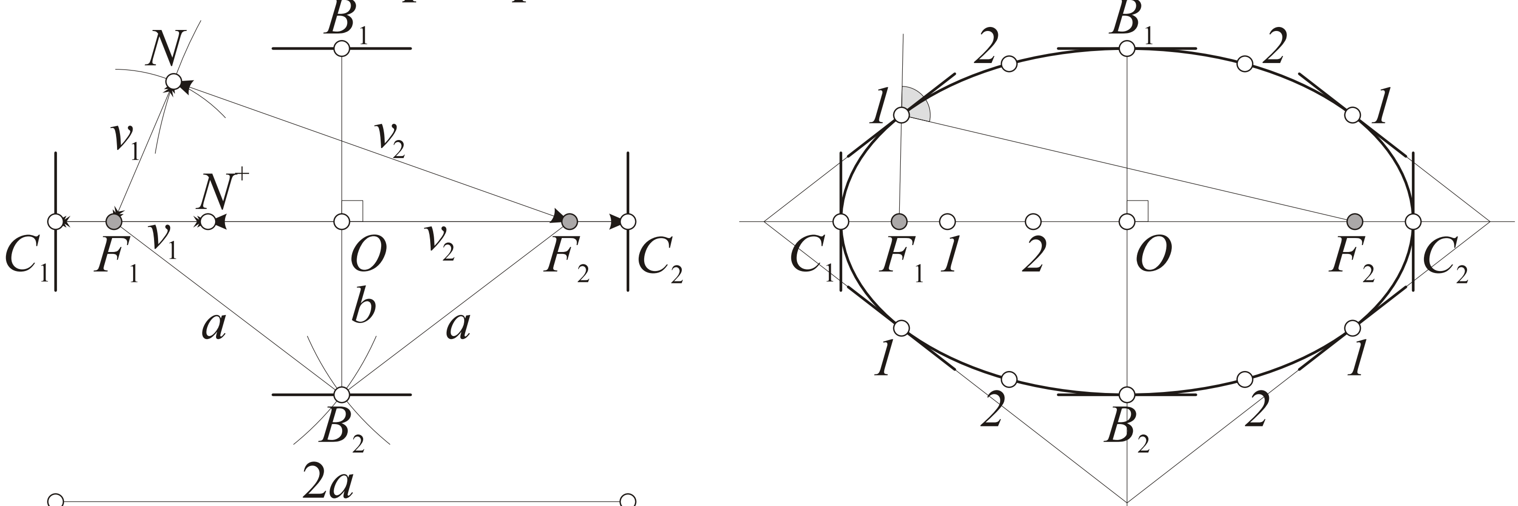
Adottak a síkon az F_1 és az F_2 pontok (***fókuszok***) valamint a $2a$ távolság úgy, hogy $2c = F_1F_2 < 2a$ teljesüljön. ***Ellipszisnek*** nevezzük a sík azon P pontjainak halmazát, amelyekre fennáll a $PF_1 + PF_2 = 2a$ egyenlőség ($v_1 = PF_1$ és $v_2 = PF_2$ a P pont ***vezérsugarai***).

Szimmetriák: az F_1F_2 egyenesre (a ***nagytengely*** egyenesére) és az F_1F_2 szakasz felező merőlegesére (a ***kistengely*** egyenesére) vonatkozó ***tengelyes szimmetriák,*** és e két egyenes O metszéspontjára (a ***középpontra***) vonatkozó ***centrális szimmetria.***

A szimmetriatengelyekre illeszkedő pontok a C_1 és C_2 ***csúcspontok*** vagy ***nagytengely végpontok*** ($OC_1 = OC_2 = a$), továbbá a B_1 és B_2 ***kistengely végpontok*** ($OB_1 = OB_2 = b$, $F_1B_i = F_2B_i = a$). A tengelyvégpontokhoz tartozó érintő merőleges a tengely egyenesére.

Állítás: Az ellipszis egy P pontjához tartozó érintője felezi a ponthoz tartozó v_1 és v_2 vezérsugarak külső szögét.

Ellipszispontok és érintők szerkesztése



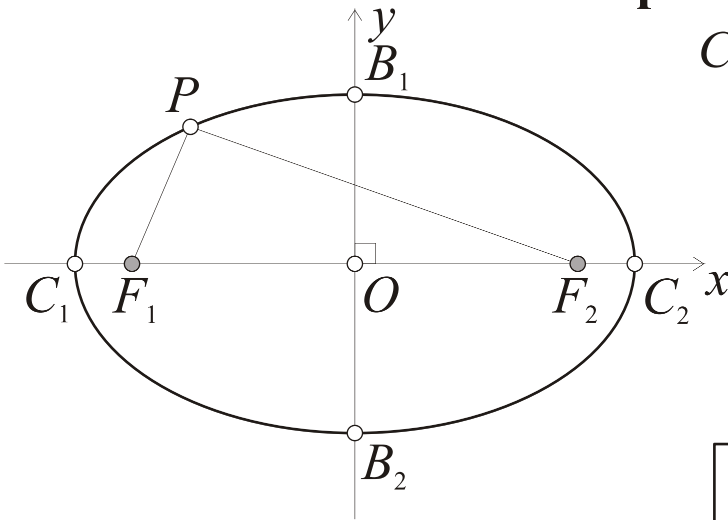
• Az F_1F_2 egyenesen O-tól a távolságra kijelöljük a C_1 és C_2 csúcspontokat.

• Az F_1F_2 szakasz felező merőlegesén a fókuszoktól a távolságra adódnak a kistengely B_1 és B_2 végpontjai.

• Ha a $C_1C_2 = 2a$ szakaszt egy F_1 és O közé eső N^+ ponttal két részre osztjuk, akkor a létrejövő $v_1 = N^+C_1$ és $v_2 = N^+C_2$ szakaszok ($v_1 + v_2 = 2a$ miatt) egy, az ellipszisre illeszkedő (megfelelő) N pont vezérsugarai lehetnek.

• N^+-hez hasonlóan további osztópntok is felvehetők F_1-től O felé haladva növekvő közökkel. Mindegyikhez megszerkeszthetjük a megelelő ellipszispontokat, amelyek a szimmetriák miatt négyesével adódnak. A szimmetriákat az érintők szerkesztése során is kihasználhatjuk.

Az ellipszis egyenlete



$$C_1C_2 = 2a; \quad F_1F_2 = 2c; \quad b^2 = a^2 - c^2$$

$$F_1(-c,\ 0); \quad F_2(c,\ 0); \quad P(x,\ y)$$

$$F_1P = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$F_2P = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$F_1P + F_2P = 2a$$

$$\boxed{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x^2 + 2xc + c^2) + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x^2 - 2xc + c^2) + y^2$$

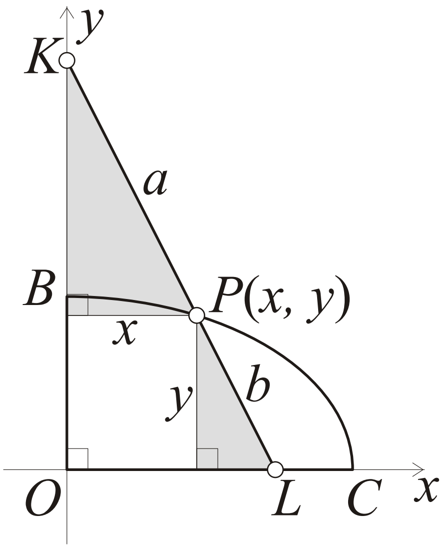
$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2) + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ illetve } K(u,\ v) \text{ középponttal: } \frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1}$$

Az ellipszográf elve, papírcsík szerkesztés



Az $a + b$ hosszúságú KL egyenes szaksz úgy mozog a koordináta-rendszerben, hogy mozgása közben K és L végpontjai rendre az x ill. y tengelyen maradnak. Vizsgáljuk, milyen pályán mozog eközben a szakaszt a és b hosszúságú darabokra osztó P pont.

A megjelölt hasonló derékszögű háromszögekből:

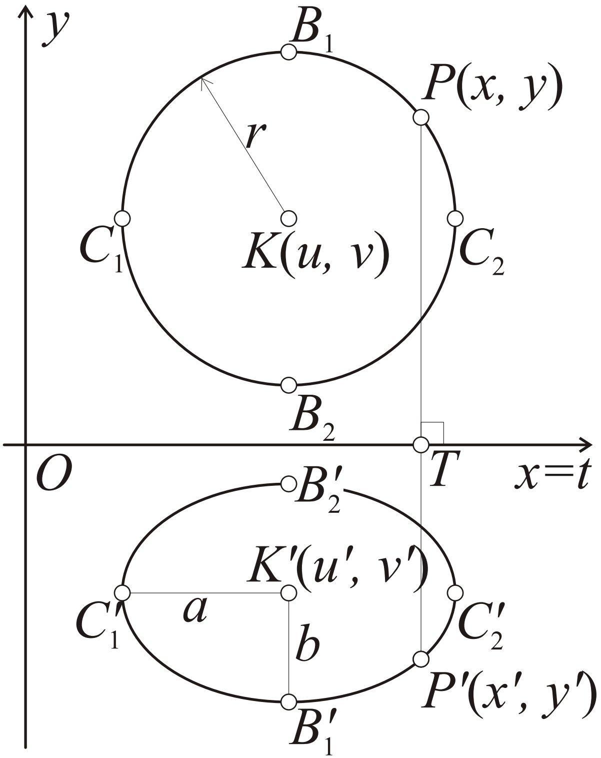
$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b}, \text{ majd négyzetre emelve: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Láthatjuk tehát, hogy a P pont egy origó középpontú a, b féltengelyű ellipszis pályán mozog ($a = OC$, $b = OB$). Ez az ***ellipszográf elve*** (ill. az ún. ***papírcsík szerkesztés***).

Feladat: Adott egy ellipszis C_1C_2 nagytengelye és azon kívül egy P pontja. Állítsuk elő a B_1B_2 kistengelyt.

Megoldás a *papírcsík szerkesztés megfordítása* alapján: B_1B_2 egyenese a C_1C_2 szakasz felező merőlegese. P köré körívet rajzolunk $a = C_1C_2/2$ sugárral. Ez a kör a B_1B_2 egyenesből (P oldalán) kimetszi a K pontot, a KP egyenes pedig C_1C_2-ből az L pontot. A fél kistengely hossza a PL távolság: $b = B_1B_2/2 = PL$. Ezt kell felmérni a középponttól (a tengelyek metszéspntjától) B_1 és B_2 kijelöléséhez.

A kör affin képe ellipszis



Adott a t tengelyű λ arányú merőleges affinitás, és a K középpontú r sugarú ***kör.*** Keressük a kör képét.

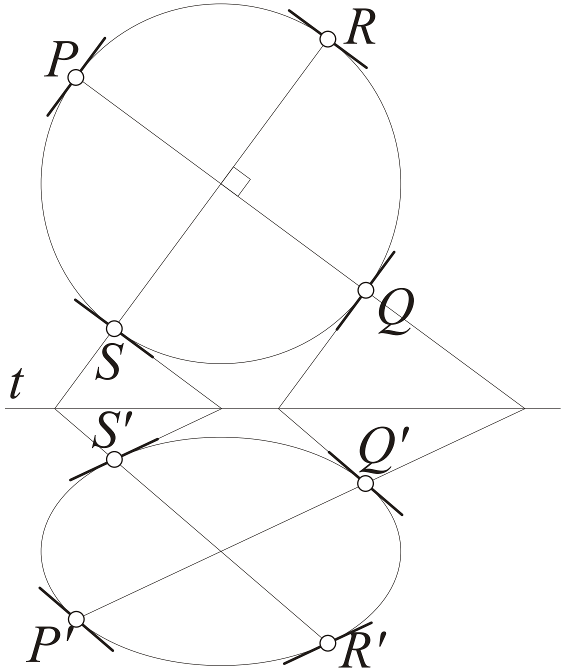
Koordináta-rendszert rögzítünk a síkon úgy, hogy annak x tengelye egybeessen t-vel. Tekintjük a kör egy P pontját. Ennek koordinátáira az alábbi egyenlet teljesül:

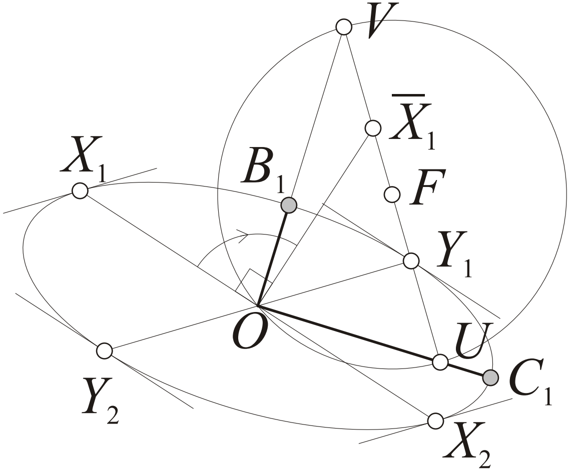
$$(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$$

Az affinitás definíciója szerint $P'T=\lambda PT,$ így P' koordinátai az $x'=x$ és $y'=\lambda y$ kifejezésekkel adódnak. Fordítva, P koordinátái is kifejezhetők P'-éből: $x=x',$ $y=y'/\lambda$. Ezt a kör egyenletébe helyettesítve:

$$(x'-u)^2+(y'/\lambda-v)^2=r^2, \text{ amiből az } \frac{(x'-u)^2}{r^2}+\frac{(y'-\lambda v)^2}{(\lambda r)^2}=1$$

egyenlet adódik. Ez pedig a K' középpontú ($u'=u,$ $v'=\lambda v$) ***ellipszis*** egyenlete, amelynek x-szel párhuzamos féltengelye ($|\lambda|<1$ esetén fél nagytengelye) $a=r,$ míg y tengellyel párhuzamos féltengelye (fél kistengelye) $b=|\lambda|r.$





Konjugált átmérőpár

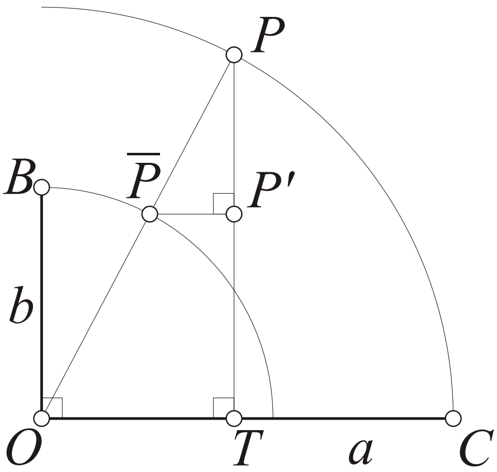
Az ellipszis (spec. a kör) két átmérőjét ***konjugált átmérőpárnak*** nevezzük, ha az egyik átmérő végpontjaihoz tartozó érintők párhuzamosak a másik átmérővel, és a második átmérő végpontjaihoz tartozó érintők párhuzamosak a második átmérővel.

A kör konjugált átmérőpárjai a merőleges átmérőpárok.

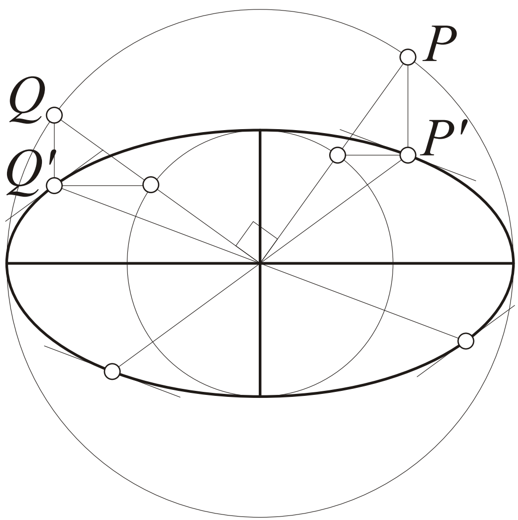
A párhuzamosságtartás miatt a kör (vagy egy ellipszis) konjugált átmérőpárjának affin képe a képellipszis egy konjugált átmérőpárja.

Rytz-szerkesztés. Adott egy ellipszis X_1X_2, Y_1Y_2 konjugált átmérőpárja. Keressük a C_1C_2, B_1B_2 tengelyeit. Az OX_1 átmérőt O körül 90°-kal elforgatva $O\overline{X}_1$ adódik. Az $\overline{X}_1Y_1$ szakasz F felezőpontja körül O-n áthaladó kört rajzolunk, amely az $\overline{X}_1Y_1$ egyenest az U és V pontokban metszi (U az X_1X_2, Y_1Y_2 átmérők hegyesszögű tartományába esik). Ekkor OU a nagytengely egyenese: $OC_1 = \overline{X}_1U$; a kistengely egyenese pedig OV: $OB_1 = \overline{X}_1V$.

Kétkörös szerkesztés



Ha adottak az ellipszis tengelyei, megrajzoljuk a ***főkört*** – a nagytengely Thalész-körét (sugara a) – és a ***mellékkört*** – a kistengely Thalész-körét (sugara b). P a főkör egy tetszőleges pontja. Az OP sugár $\overline{P}$-ban metszi a mellékkört. P-ben merőlegest állítunk az OC nagytengelyre, $\overline{P}$-ban pedig az OB kistengelyre. Ekkor e két egyenes P' metszéspontja illeszkedik az ellipszisre.

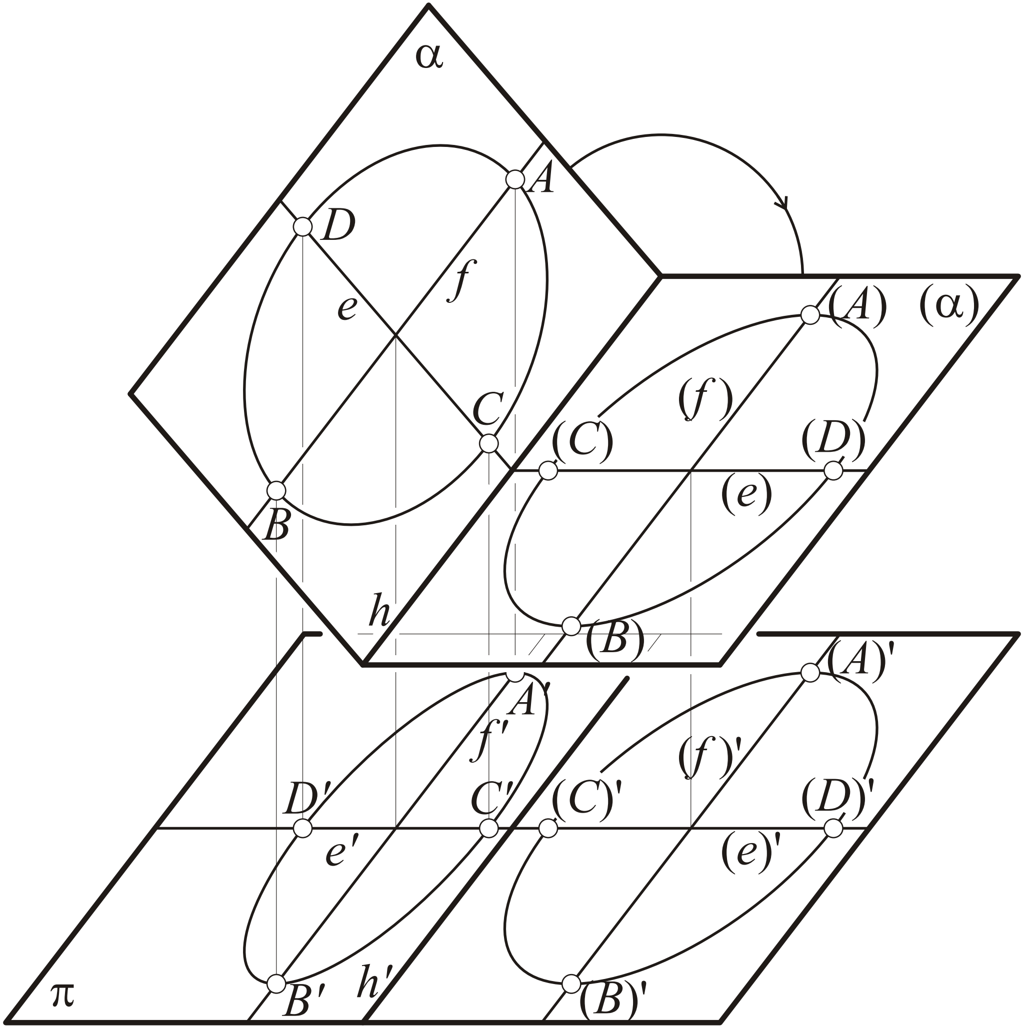


Ugyanis OT és $\overline{P}P'$ az OPT szög szárainak párhuzamos szelői, így $P'T/PT = \overline{P}O/PO = b/a = \lambda$ állandó, vagyis P' a P pont OC tengelyre vonatkozó λ arányú affin képe.

A főkör további pontjaiból kiindulva tetszőlegesen sok ellipszispont megszerkeszthető.

Célszerű a főkör egymásra merőleges (konjugált) OP és OQ átmérőpárjaiból kiindulni. Ekkor a kapott átmérők konjugáltságából egyszerűen adódnak az érintők is.

3. A kör merőleges vetülete, körábrázolás



A leforgatott kép és a vetület merőleges affin kapcsolatban van, így ***a kör merőleges vetülete elipszis.***

A képellipszis $A'B'$ ***nagytengelye*** a kör f ***fővonalra*** illeszkedő AB átmérőjének vetülete. Hossza megegyezik a kör átmérőjével: $A'B' = AB$.

A képellipszis $C'D'$ ***kistengelye*** pedig az e ***esésvonalra*** illeszkedő CD átmérő képe. Hossza:

$$C'D' = CD \cdot \cos \varphi,$$

ahol φ a kör α síkjának a képsíkkal bezárt szöge.

A körábrázolás lépései

A kör ábrázolásához ismerni kell:

- A kör *középpontját*
- A kör *sugarát*
- A kör *síkját*

Egy feladat megoldása során ezek explicit előállítása az első feladat, amely általában a kör síkjának leforgatását igényli.

Kétképsíkos ábrázolásban a szerkesztés során elő kell állítani az alábbi, úgynevezett **lényeges átmérők** *mindkét képét* a végpontjaikhoz tartozó *érintőkkel* együtt:

- Az I. képellipszis nagytengelyére képeződő átmérőt,
- Az I. képellipszis kistengelyére képeződő átmérőt,
- A II. képellipszis nagytengelyére képeződő átmérőt,
- A II. képellipszis kistengelyére képeződő átmérőt,
- A szélső pontokat tartalmazó átmérőt.

Végül a lényeges átmérők, valamint a feladatban megadott görbepontok és érintők figyelembevételével (görbevonalzó segítségével) meg kell rajzolni a képellipsziseket.