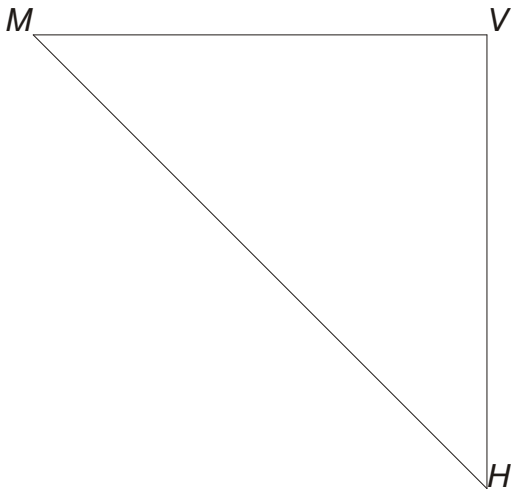
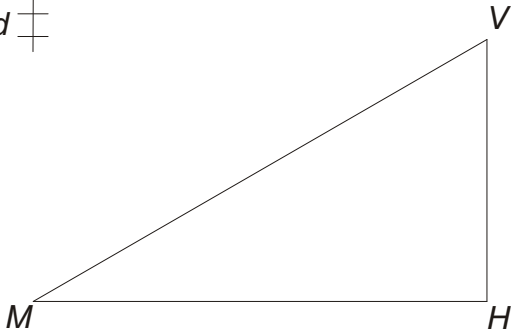


# **KÖRÁBRÁZOLÁS**

**Általános síkra illeszkedő  
kör**

$d$  



Adott az  $MHV$  háromszög és a  $d$  távolság. Ábrázoljuk azt a kört, amely a háromszög mindhárom oldalától  $d$  távolságra van.

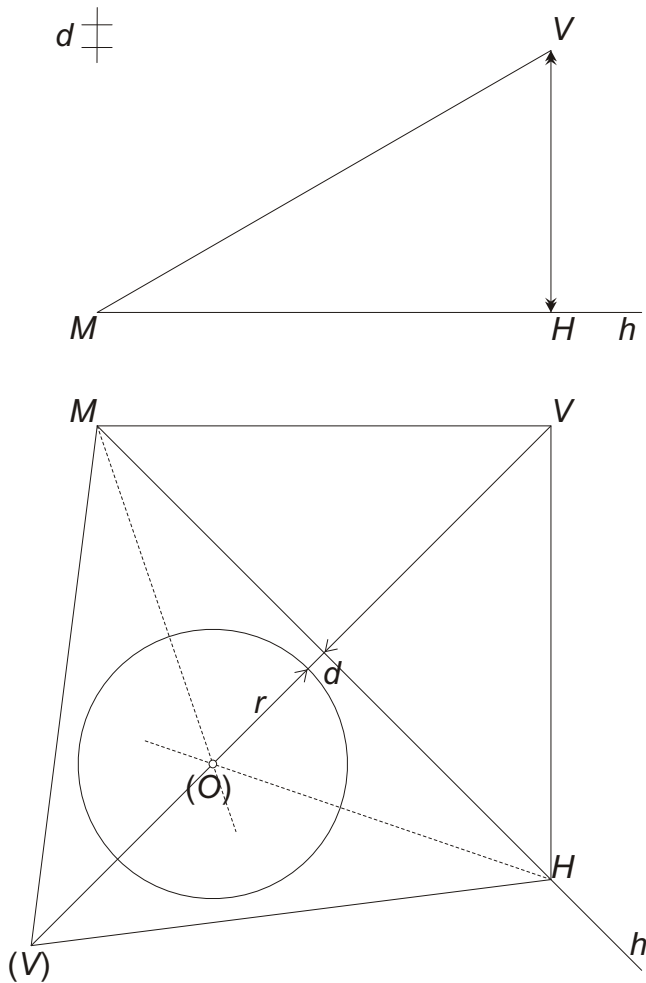
A feladat megoldásához ismernünk kell a kör

- közepét,
- sugarát, és
- síkját.

Ezen adatok közül csak a kör síkját ismerjük közvetlenül, ami azonos a háromszög síkjával. A megoldás első lépése tehát a középpont és a sugár előállítása lesz.

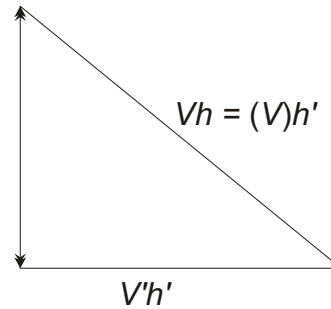
A feltételeknek megfelelő kört úgy származtathatjuk, hogy a háromszögbe írt kört, annak középpontjából alkalmas arányban lekicsinyítjük. Így a keresett kör középpontja egybeesik a beírt kör középpontjával, sugara pedig a beírt kör sugarának és a  $d$  távolságnak a különbsége.

A szerkesztést a háromszög síkjának leforgatásával oldhatjuk meg egyszerűen, ahol a háromszög szögfelezői közvetlenül megrajzolhatók. A kör középpontja azok metszéspontjaként adódik.



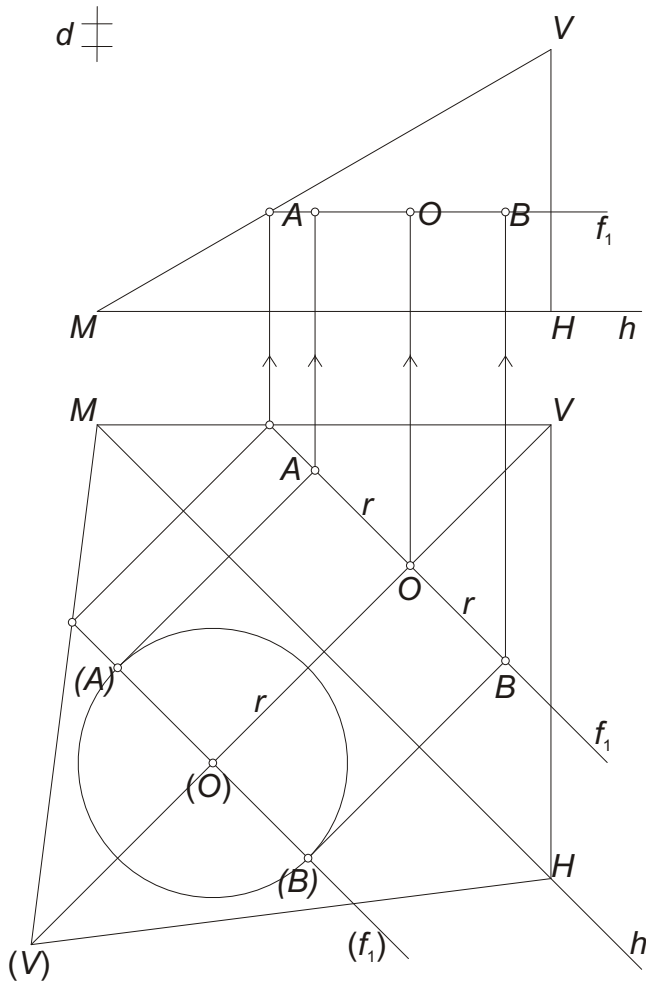
A leforgatás tengelyének a sík  $h = MH$  I. fővonalát választjuk. Ekkor a forgatás során az  $M$  és  $H$  pontok helyben maradnak, a  $V$  pont pedig egy  $h$ -ra merőleges síkú köríven mozogva jut leforgatott helyzetébe, a  $(V)$  pontba, úgy, hogy  $(V)$  és  $h'$  távolsága megegyezik  $V$  és  $h$  valódi távolságával.

Ez utóbbit a megfelelő különbségi háromszög átfogójaként kapjuk, amelynek vízszintes befogójára a  $V'h'$  távolságot, függőleges befogójára pedig  $V$  és  $h$  II. képen leolvasható magasságkülönbségét mérjük.



A leforgatott háromszögben a szögfelezőket megrajzolva jelöljük ki a keresett kör  $(O)$  középpontját, majd a beírt kör érintési pontjától a  $d$  távolságot visszamérve megkapjuk a kör egy kerületi pontját, és megrajzolhatjuk a kört.

Mivel esetünkben az  $MHV$  háromszög I. képe az  $M'H'$  átfogójú egyenlő szárú (derékszögű) háromszög, és ráadásul  $MH$  I. főegyenes, ezért maga az  $MHV$  háromszög is egyenlőszárú:  $MV = HV$ . Így a  $V$  csúshoz tartozó szögfelező egyben magasságvonal és súlyvonal is.

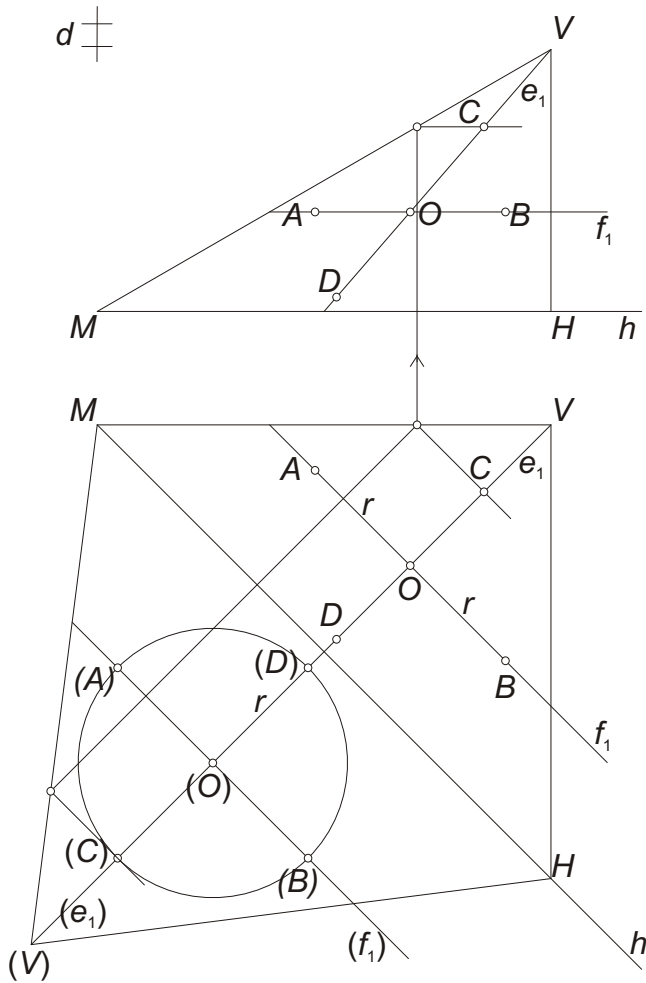


Előállítjuk a képellipszisek tengelyeire képeződő átmérőket.

**1.a.** Az I. kép ellipszis nagytengelye az I. fővonalra illeszkedő körátmérő vetülete. Ez az I. képen nem rövidül, hossza meg egyezik a kör valódi átmérőjével.

Egy síkon az I. fővonalak egymással párhuzamos egyenesek, a leforgatott síkon így  $h$ -val párhuzamosan megrajzolhatjuk az  $O$  ponton áthaladó  $f_1$  fővonalat, amelyre a keresett  $AB$  átmérő illeszkedik.

Az I. és II. kép meghatározásához  $f_1$  és  $MV$  metszéspontját keressük meg, előbb az I., majd a II. képen. Az így kapott ponton át  $h$ -val párhuzamosan kapjuk  $f_1$  vetületeit. Ezután az  $f_1$ -re illeszkedő  $A$ ,  $B$  és  $O$  pontokat már kijelölhetjük.

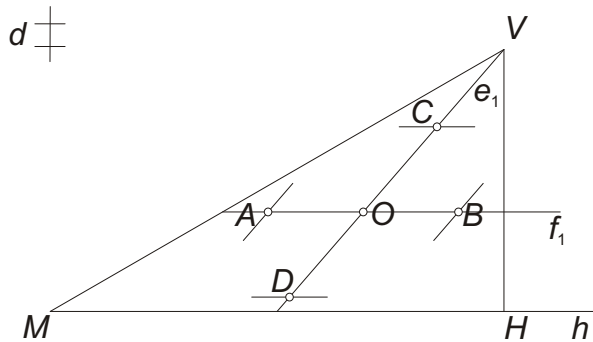


**1.b.** Az I. kép ellipszis kistengelye az I. esésvonalra illeszkedő körátmérő vetülete. Ez az átmérő rövidül legnagyobb mértékben, ennek a vetülete a legrövidebb.

Egy sík I. esésvonalai az I. fővonalakra merőleges egyenesek. Esetünkben a középponton áthaladó esésvonal  $e_1 = VO$ . A leforgatott síkon kijelölhetjük az  $e_1$  egyenesre illeszkedő átmérő  $C$  és  $D$  végpontját.

$C$  I. és II. képének meghatározásához tekintsük például a kör  $C$ -hez tartozó érintőjét, ami  $h$ -hoz és  $f_1$ -hez hasonlóan szintén egy I. fővonal a kör síkjában. Előállítjuk az érintő  $MV$ -vel közös pontjának I. és II. képét. Ezeken át megrajzoljuk az érintő képét  $h$  megfelelő vetületével párhuzamosan. Így megkapjuk  $C$  vetületeit.

$D$  képeit is kereshetjük hasonló módon, de kihasználhatjuk az  $O$  pontra vonatkozó centrális szimmetriát is, amit a merőleges vetítés megőriz.

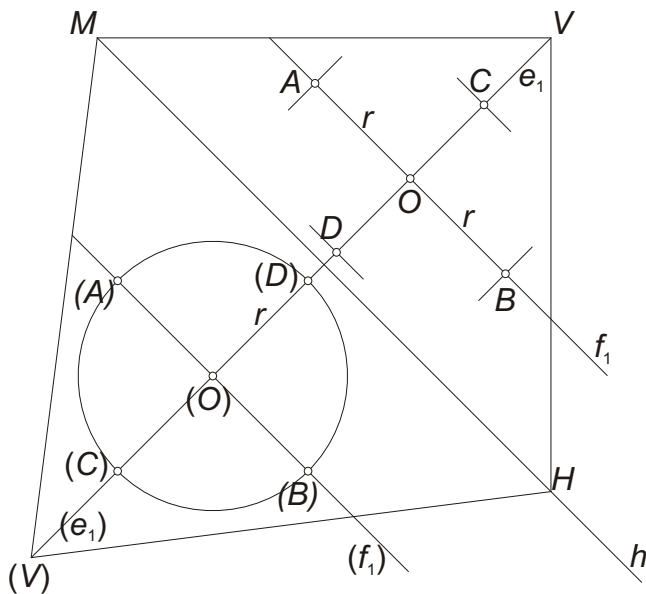


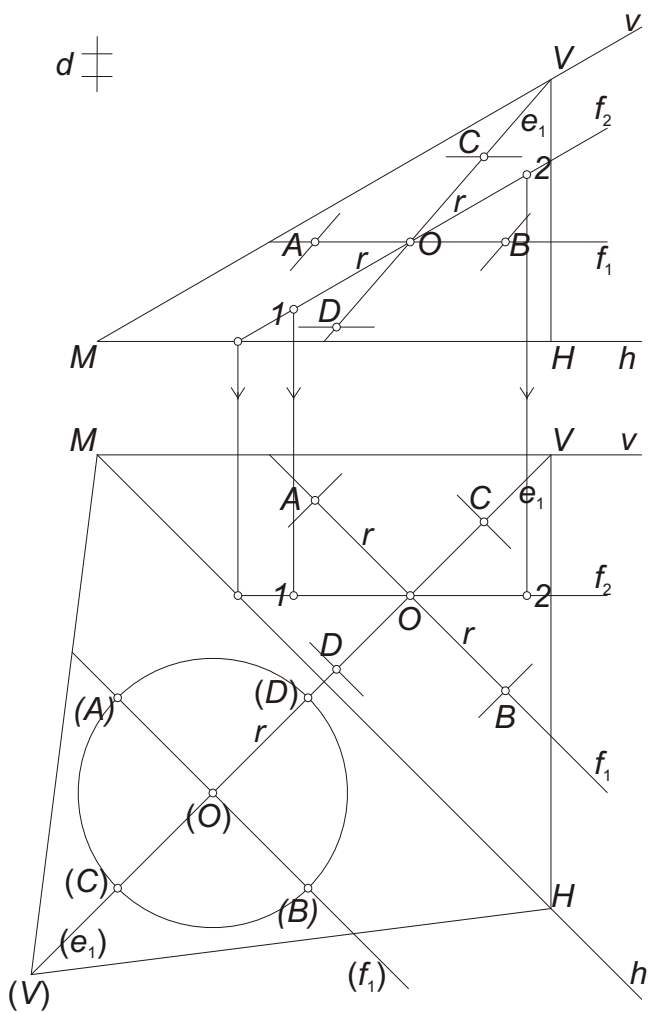
Az érintők megrajzolása annak alapján történhet, hogy  $AB$  és  $CD$  a körnek egymásra merőleges átmérői, tehát konjugált átmérőpárt alkotnak. Ez azt jelenti, hogy az egyik átmérő végpontjaihoz tartozó érintők párhuzamosak a másik átmérővel, és fordítva, a második átmérő végpontjaihoz tartozó érintők párhuzamosak az első átmérővel. Mivel a merőleges vetítés a párhuzamosságot megőrzi, a képellipsziszeknek is konjugált átmérőpárját kapjuk.

Így az  $A$  és  $B$  pontokhoz tartozó érintőt mindkét vetületben  $CD$ -vel párhuzamosan kell rajzolnunk, míg a  $C$  és  $D$  pontokhoz tartozó érintőnek  $AB$ -vel kell párhuzamosnak lenni.

Ez természetesen összhangban van azzal, hogy az I. képen a tengelyek végpontjairól van szó, és így az  $A'$  és  $B'$  pontokhoz tartozó,  $C'D'$ -vel párhuzamos érintők merőlegesek az  $A'B'$  nagytengelyre, illetve a  $C'$  és  $D'$  pontokhoz tartozó,  $A'B'$ -vel párhuzamos érintők merőlegesek a  $C'D'$  kistengelyre (a nagytengely és a kistengely az ellipszisnek egy speciális konjugált átmérőpárját alkotja).

Végül megjegyezzük, hogy az előző lépésben a  $C$  pont szerkesztésénél már előállítottuk a ponthoz tartozó érintőt, ami természetesen azonos a most elmondott elv alapján adódó érintővel.

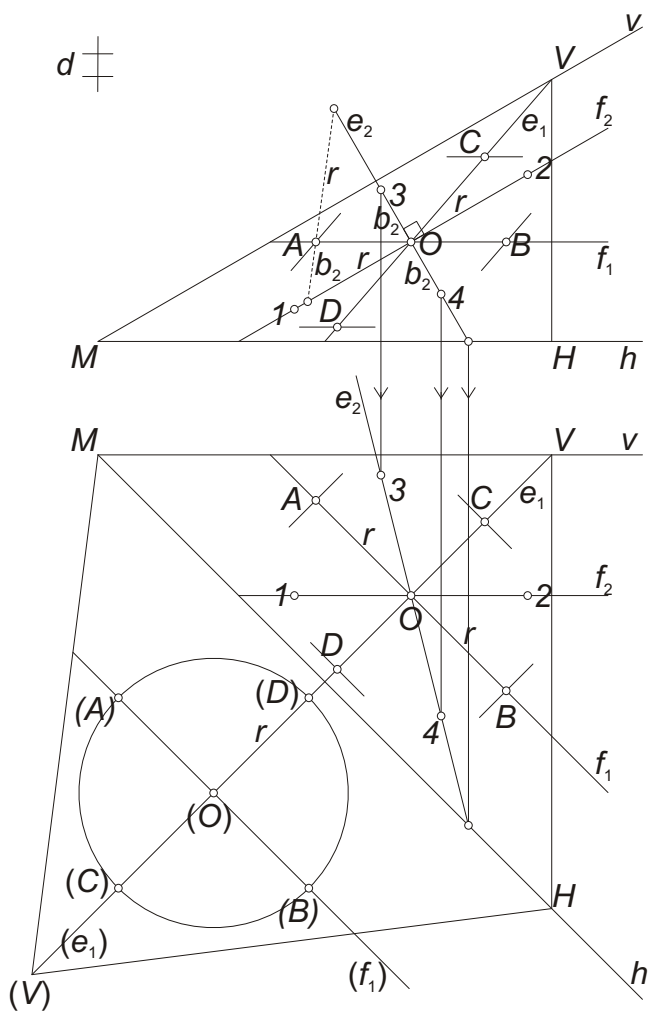




**2.a.** A II. képellipszis nagytenyéjére képeződő átmérő illeszkedik a kör síkjának a középponton áthaladó II. fővonalára. A nagytenyeg hossza megegyezik a kör átmérőjének hosszával.

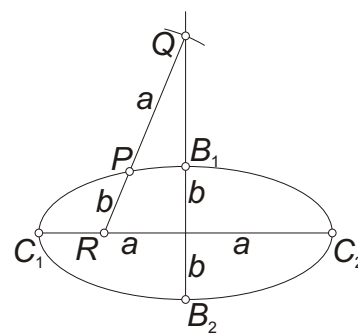
Fölvesszük tehát az  $O$  ponton áthaladó  $f_2$  II. fővonalat. Az I. képet rendező irányra merőlegesen (vízszintesen) megrajzolva a  $h$  egyenessel alkotott metszéspontot tekintjük. Ennek II. képét megkeresve és  $O''$ -vel összekötve kapjuk a fővonal II. képét. (Azt is észrevehetjük, hogy a háromszög  $MV$  oldalának  $v$  egyenese is II. fővonal, így  $f_2$  párhuzamos  $v$ -vel).

A II. képen az  $O''$  ponttól a kör sugarának valódi hosszát (az  $r$  távolságot) felmérve kapjuk az  $12$  átmérő végpontjainak II. vetületét, az I. képek pedig rendezővel adódnak.



**2.b.** A II. kép ellipszis kistengelyére képeződő átmérő illeszkedik a kör síkjának a középponton áthaladó II. esésvonalára. A II. képen ez az átmérő rövidül leginkább a vetítés során. Fölvesszük tehát az  $O$  ponton áthaladó  $e_2$  II. esésvonalat. Ennek II. képe merőleges az  $f_2$  fővonal képére. Az I. kép előállításához megkeressük például az esésvonal  $h$ -val közös pontját is.

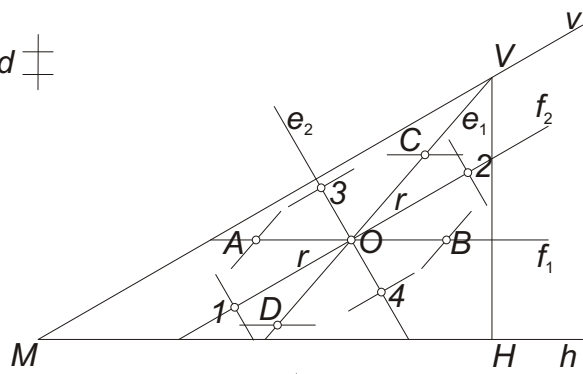
A II. kép ellipszis kistengelyének végpontjait közvetlenül (síkbeli szerkesztésként) is megkaphatjuk az úgynevezett *papírcsík*-szerkesztésnek (ill. az *ellipszográf* működési elvének) megfordításából. Ennek értelmében, ha adott egy ellipszis  $C_1C_2$  nagy tengelye és egy további  $P$  pontja, az alábbiak szerint szerkeszthető meg a  $B_1B_2$  kistengelye.



A  $C_1C_2$  szakasz felező merőlegeseként adódik a kistengely egyenese. A  $P$  köré  $a = C_1C_2 / 2$  sugárral (a fél nagy tengely hosszával) rajzolt körív a kistengely egyeneséből egy  $Q$  pontot metsz ki. A  $PQ$  egyenes a nagy tengely  $C_1C_2$  egyenesét  $R$ -ben metszi. Ekkor  $PR = b = B_1B_2 / 2$  a fél kistengely hossza.

A II. kép ellipszisnek ismerjük az  $1''2''$  nagy tengelyét és például az  $A''$  pontját. A fél nagy tengely hossza a kör  $r$  sugarával egyezik meg. A fenti szerkesztést elvégezve megkapjuk a fél kistengely  $b_2$  hosszát, amit  $e_2''$ -re mérve adódnak az kistengely  $3''$  és  $4''$  végpontjai. Az átmérő végpontok I. képét rendezővel állítjuk elő.

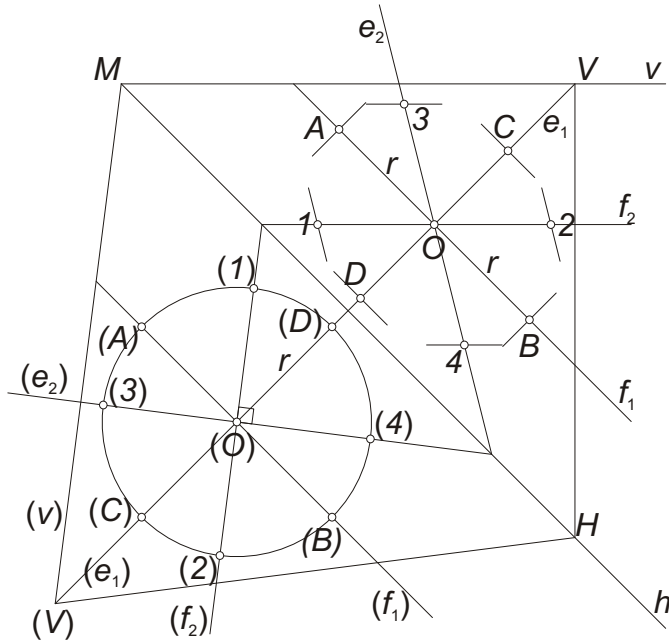


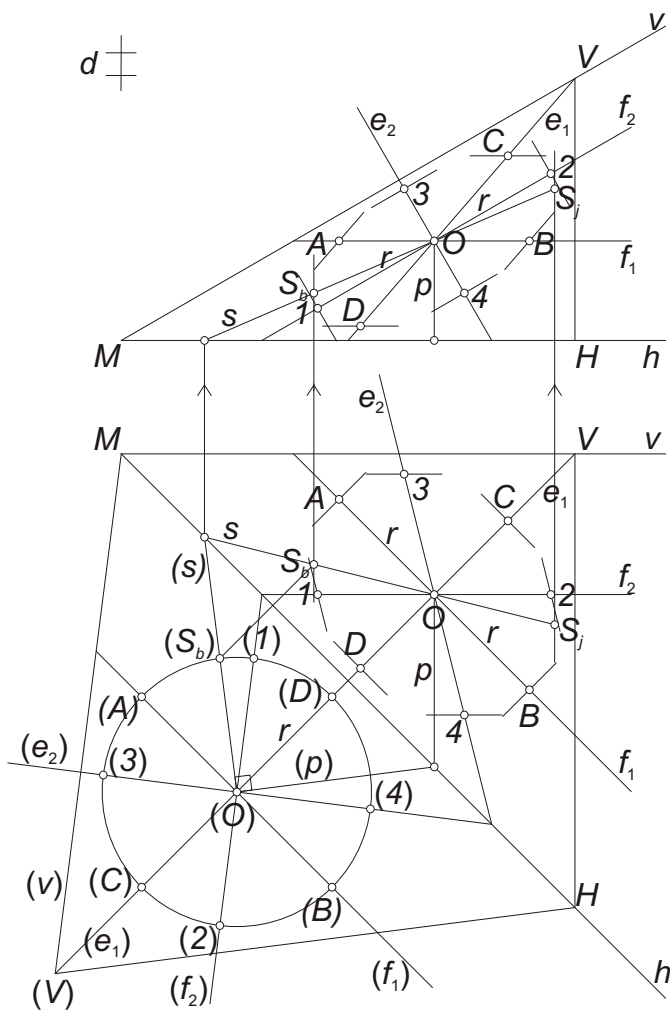
$d \perp$ 

Az 12 és 34 átmérők végpontjaiban is megszerkesztjük az érintőket. Az eljárás most is azon alapulhat, hogy ezek az átmérők az eredeti körben egymásra merőlegesek, tehát konjugált átmérőpárt alkotnak. Így vetületeik a képellipsziseknek szintén konjugált átmérői lesznek. Ennek megfelelően az 1 és 2 pontokban a 34 átmérővel párhuzamosan kell megrajzolni az érintőt, a 3 és 4 pontokban pedig az 12 átmérővel párhuzamosan.

Megjegyezzük, hogy a II. képellipszis tengelyeire képeződő átmérőket is meg lehet kapni a leforgatásban, és annak alapján előbb az I. majd a II. képen is. Ugyanis  $M(V)$ -vel párhuzamosan ( $f_2$ ) megrajzolható és rájuk merőlegesen  $e_2$  is adódik. A leforgatott kör pedig kijelöli az ezekre illeszkedő 1 és 2, illetve 3 és 4 átmérő végpontokat.

Általában azonban az előbbi, közvetlen módon végrehajtott eljárás pontosabb szerkesztést eredményez.



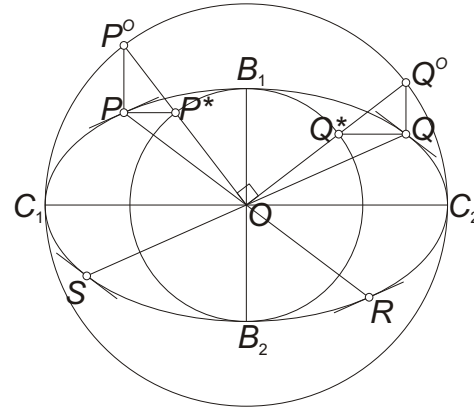
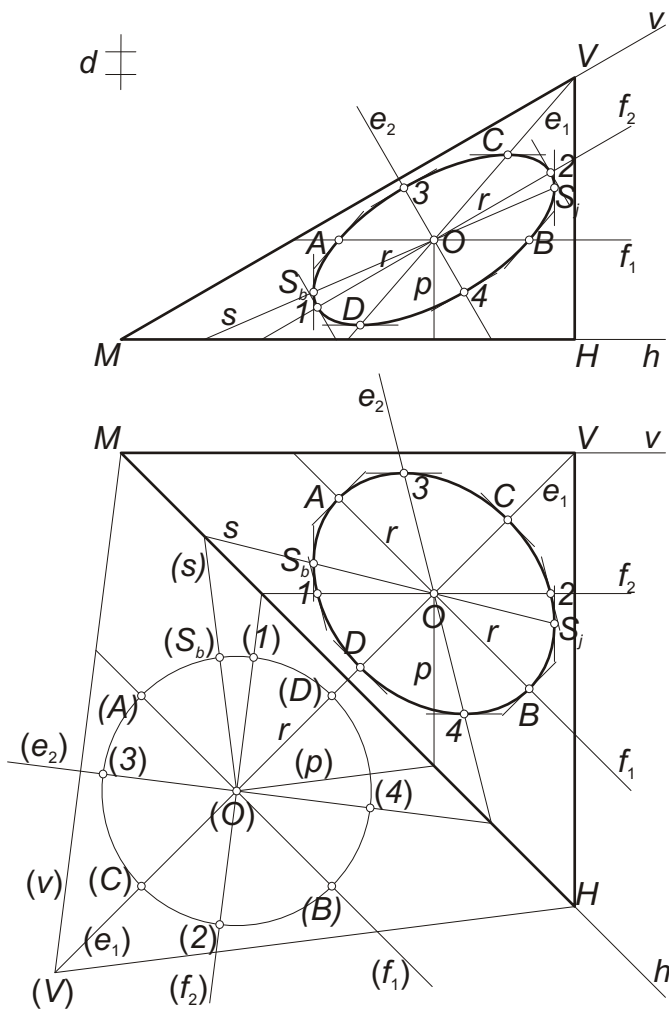


Lényeges átmérőként még a szélső pontokat tartalmazó átmérőt szerkesztjük meg. Ezekben a pontokban az érintők az I. és a II. képen is rendező irányúak (függőlegesek), vagyis a kör síkjának profilegyenesei. A szélső pontokat tartalmazó átmérő tehát a sík profilegyenesére merőleges.

Tekintünk tehát a kör síkjában egy profilegyenest, például az  $O$  ponton áthaladó  $p$  egyenest (esetünkben  $VH$  is alkalmas lenne). Ennek  $h$ -val alkotott metszéspontja a leforgatás során helyben marad, így azt ( $O$ )-val összekötve a leforgatott ( $p$ ) egyenest is megkapjuk. A leforgatott síkon erre merőlegesen vehetjük föl a keresett átmérő ( $s$ ) egyenesét. Ezen a leforgatott kör kijelöli például az  $S_b$  bal oldali szélső pontot is. Az ( $s$ ) egyenes és  $h$  közös pontja a visszaforgatásnál helyben marad, ennek alapján  $s'$  és  $s''$  megrajzolható, és ezeken  $S_b'$  illetve  $S_b''$  is adódik. A jobb oldali  $S_j$  szélső pontot  $S_b$   $O$ -ra vonatkozó tükörképeként kapjuk.  $S_b$  és  $S_j$  rendezője egyben a ponthoz tartozó érintő képe is.

Végül a megszerkesztett pontok és érintők ismeretében megrajzoljuk a vetületi görbéket.

Bizonyos esetekben szükség lehet további pontok és érintők szerkesztésére is. Ez a tengelyek ismeretében például az úgynevezett *kétkörös szerkesztéssel* valósítható meg. Célszerű konjugált átmérőpárokat előállítva négyesével szerkeszteni a pontokat az alábbi módon.



Megrajzoljuk a  $C_1C_2$  nagytenyeg és a  $B_1B_2$  kistenyeg, mint átmérő fölé az ellipszis főkörét és mellékkörét. Tetszőlegesen fölveszünk egy  $P^\circ$  pontot a főkörön, és a  $P^\circ O$ -ra merőleges sugár  $Q^\circ$  végpontját is kijelöljük. A  $P^\circ O$  és  $Q^\circ O$  sugarak a mellékkört a  $P^*$  illetve a  $Q^*$  pontokban

metszik.  $P^\circ$ -ban és  $Q^\circ$ -ban a kistengellyel,  $P^*$ -ban és  $Q^*$ -ban pedig a nagytenyeggel párhuzamost rajzolva, azok metszéspontjaként rendre az ellipszis  $P$  és  $Q$  pontját kapjuk. Ezeket az  $O$  középpontra tükrözve az  $R$  és  $S$  ellipszispontok adódnak. Ekkor  $PR$  és  $QS$  az ellipszisnek egy konjugált átmérőpárja lesz, így a  $P$  és  $R$  pontokban  $QS$ -sel, a  $Q$  és  $S$  pontokban pedig  $PR$ -rel párhuzamosan rajzolhatók meg az érintők.