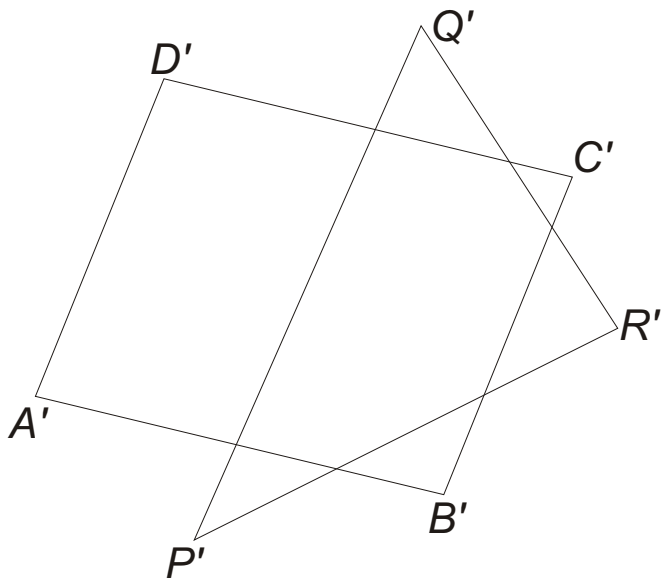
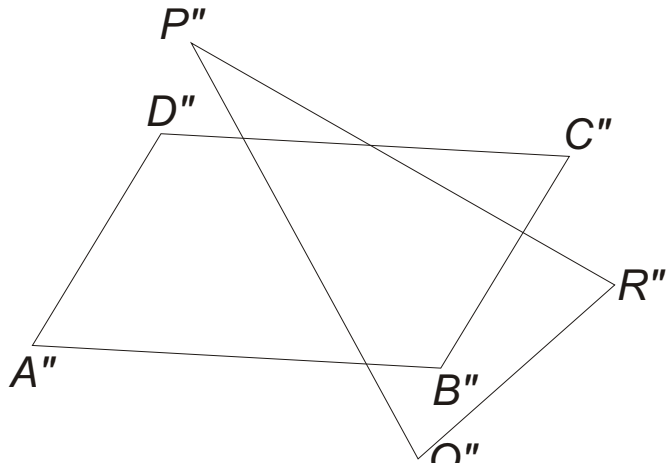


SÍKIDOMOK ÁTHATÁSA

**Parallelogramma-lemez
és háromszöglemez
áthatása**

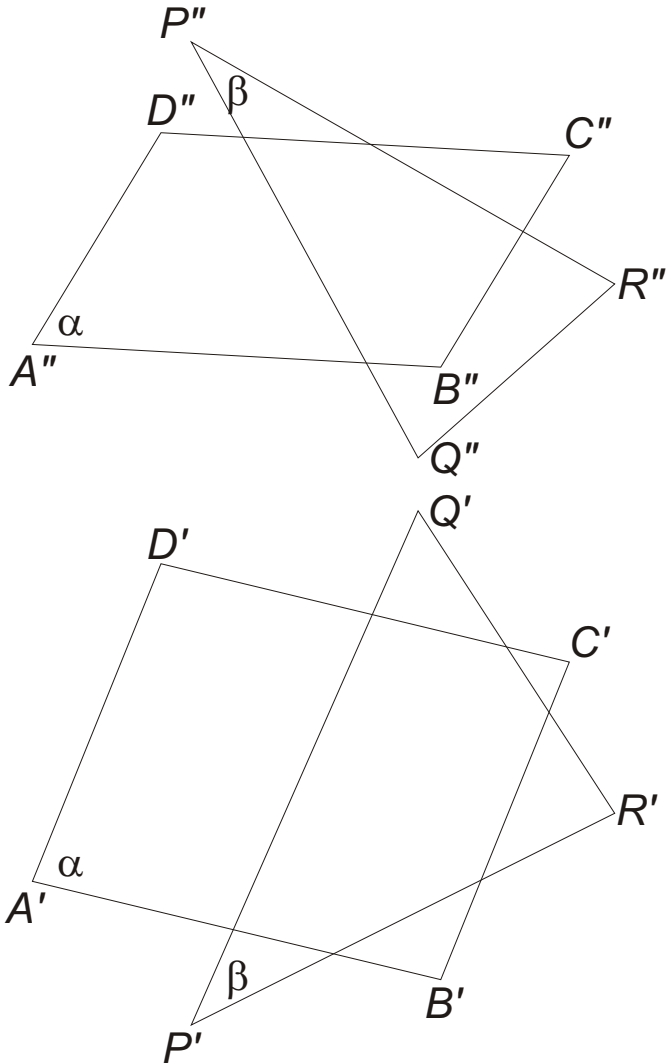
Adott az $ABCD$ paralelogramma-lemez és a PQR háromszöglemez. Szerkesszük meg a két lemez áthatását.



Tekintjük a lemezek *teljes* síkját:

$$\alpha = [A, B, C, D], \quad \beta = [P, Q, R].$$

Megszerkesztjük a két sík $x = \alpha \cap \beta$ metszévonalát. Ehhez előállítjuk a síkok két közös pontját, amelyek összekötő egyenese éppen az x metszévonal lesz. Közös pontokat úgy kaphatunk, ha az egyik sík valamely egyenesének megkeressük a másik síkkal közös pontját.

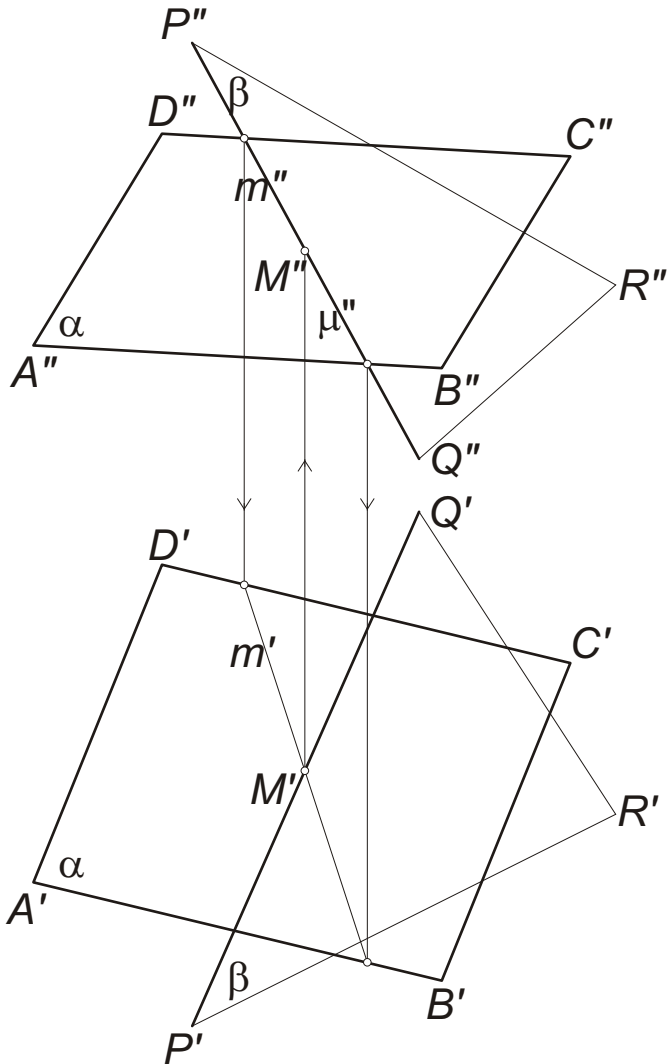


Először megkeressük például a β sík PQ egyenesének az α síkkal közös M pontját. Segédsíknak a PQ egyenes II. vetítését, μ -t választjuk, ami az m egyenest metszi ki α -ból, és ez kijelöli a PQ egyenesen a keresett M pontot.

$$PQ \subset \mu \text{ (II. vetítés)}$$

$$m = \alpha \cap \mu \text{ (} m'' = \mu'' \text{),}$$

$$M = PQ \cap m = PQ \cap \alpha.$$

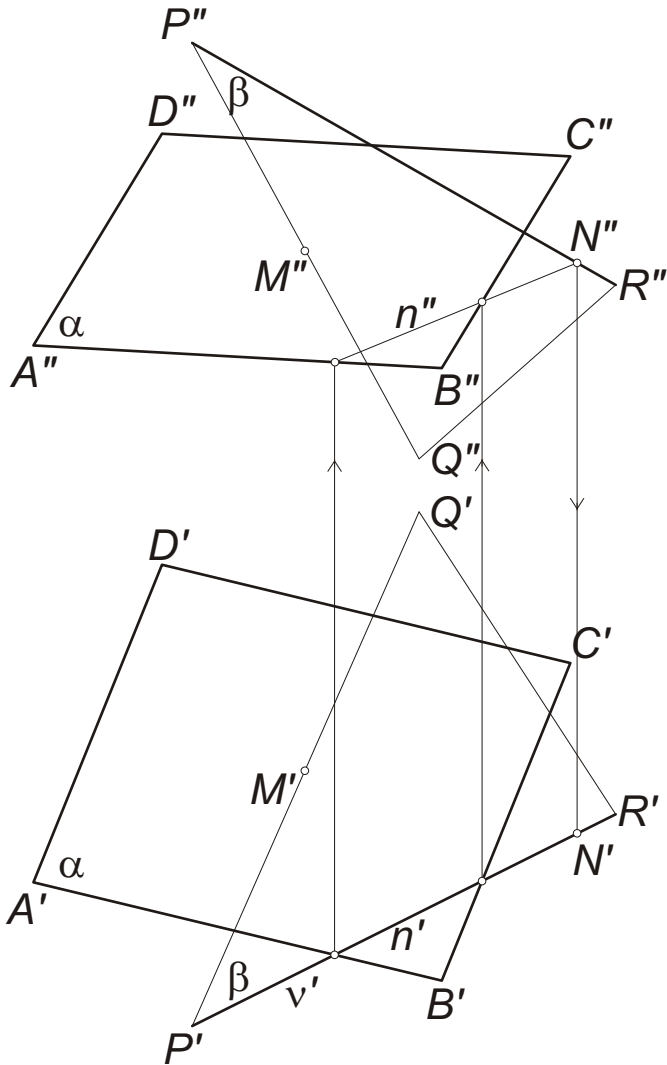


Ezután megkeressük például a β sík PR egyenesének az α síkkal közös N pontját. Segédsíknak a PR egyenes I. vetítősíkját, v -t választjuk, ami az n egyenest metszi ki α -ból, és ez kijelöli a PR egyenesen a keresett N pontot.

$$PR \subset v \text{ (I. vetítősík)}$$

$$n = \alpha \cap v \text{ (} n' = v' \text{),}$$

$$N = PR \cap n = PR \cap \alpha.$$

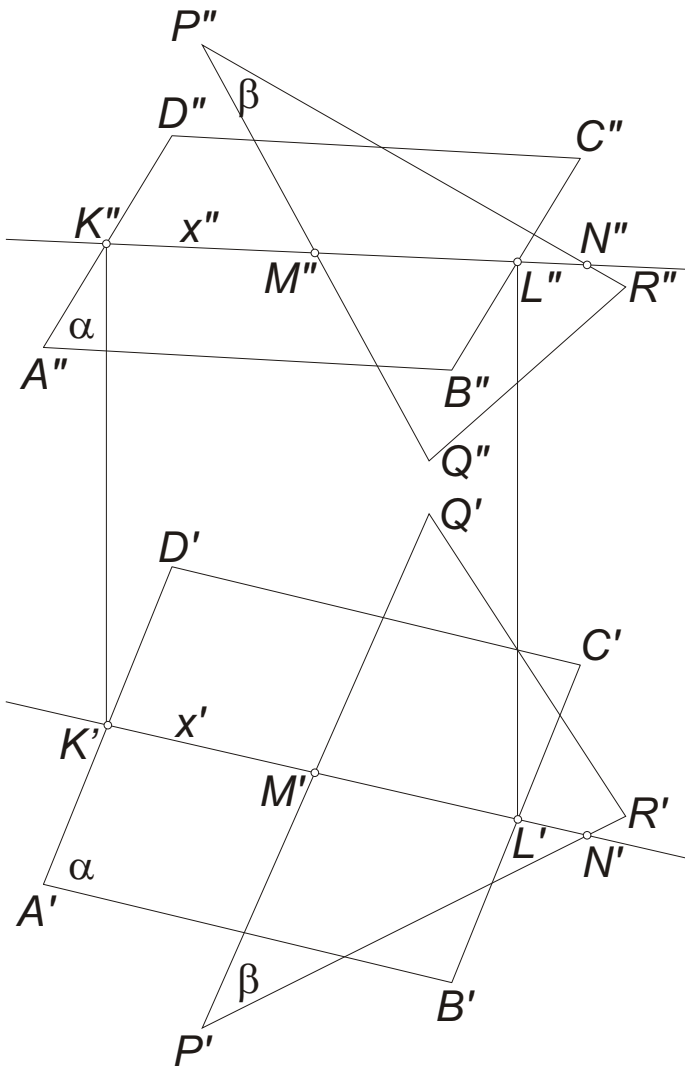


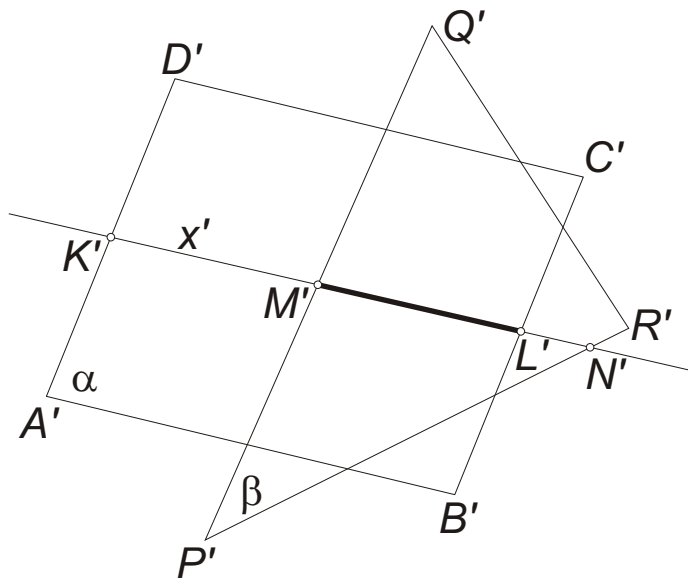
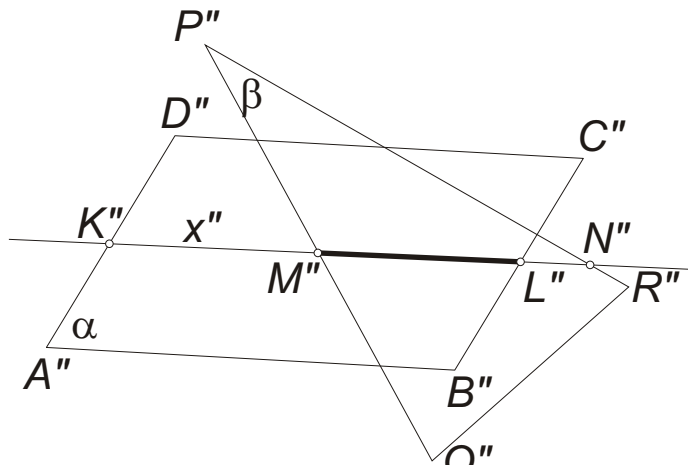
Más N az α és β síkok közös pontjai, tehát illeszkednek ezek x metszészvonalára, és meg is határozzák azt.

Célszerű ellenőrizni a szerkesztést. Mivel x mindkét síkra illeszkedik, ezért ha α vagy β valamely egyenesén az egyik vetületben metszéspontot látunk x képével, akkor az egy valódi (nem látszólagos) metszéspont képe, és így meg kell jelennie a másik képen is az előbbivel közös rendezőn.

Például $A''D''$ a K'' pontban metszi x'' -t, és $A'D'$ a K' pontban metszi x' -t. Ekkor $K = AD \cap x$ valódi metszéspont, és így K'' -nek és K' -nek közös rendezőre kell illeszkednie.

Hasonlóan, $B''C''$ az L'' pontban metszi x'' -t, és $B'C'$ az L' pontban metszi x' -t. Ekkor $L = BC \cap x$ is valódi metszéspont, és így L'' -nek és L' -nek is közös rendezőn kell lenni.

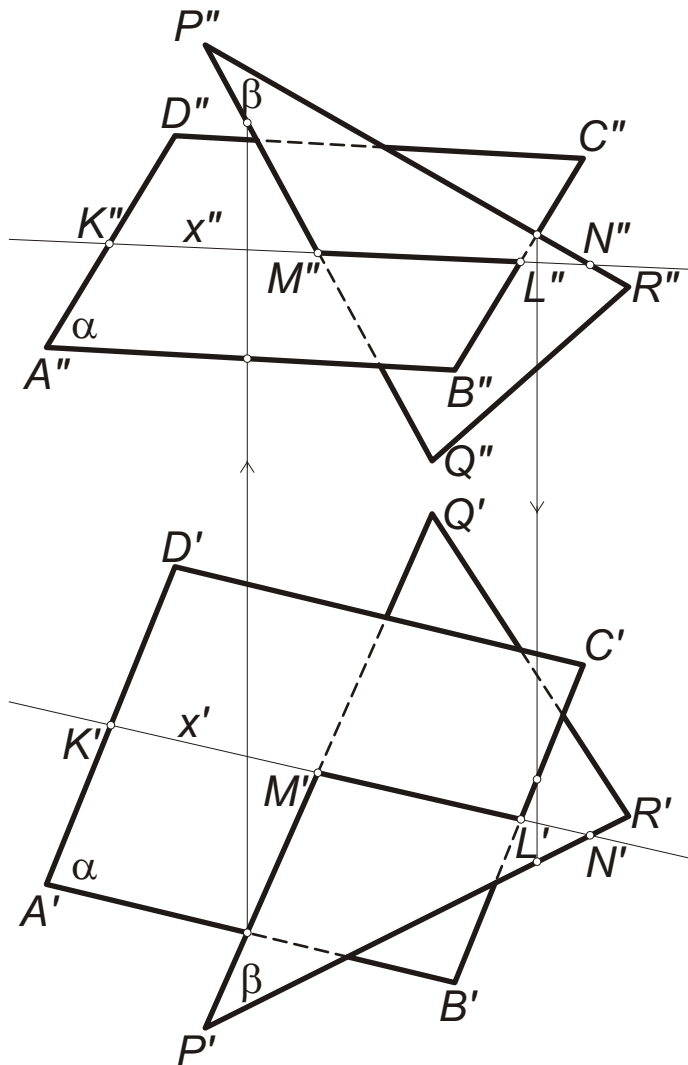




Megkeressük az **áthatási szakaszokat**, a lemezek közös részét. Az x metszésvonalnak keressük azokat a darabjait, amelyek mindkét lemeznek a belsejébe esnek. Esetünkben a KM szakasz pontjai a parallelogramma-lemeznek a belsejébe esnek, de a háromszöglemeznek külső pontjai. Az LN szakasz pontjai pedig a háromszöglemez belsejébe esnek, de a parallelogramma-lemeznek külső pontjai. Az x metszésvonal KN szakaszon kívül eső pontjai mindkét lemeznek külső pontjai. Így csak az ML szakasz pontjai esnek mindkét lemez belsejébe, tehát ML az egyetlen áthatási szakasz.

Konvex lemezek áthatása esetén a lemezek közös része is konvex. Így, ha a lemezeknek vannak közös pontjai, akkor azok egyetlen áthatási szakaszt alkotnak. Több áthatási szakasz csak akkor léphet fel, ha legalább az egyik lemez konkáv (pl. lyukas).

Aláthaóság feltüntetésére térve, az áthatási szakaszokat mindig kihúzzhatjuk, hiszen azt nem tudja eltakarni egyik lemez sem.



A láthatóság feltüntetéséhez tekintünk egy fedő pontpárt (a síkok metszésvonalán kívül), amelynek egyik eleme az egyik, másik eleme pedig a másik síkra illeszkedik. Eldöntjük, hogy melyik pont takarja a másikat. Ennek alapján megállapítjuk, hogy a pont környezetében melyik sík takarja el a másik síkot. Esetünkben (síklemezek áthatásáról lévén szó) ez a környezet a síkok metszésvonaláig kiterjeszthető. A metszésvonal másik oldalán pedig a lemezek szerepe a láthatóság szempontjából felcserélődik.

A II. képen a láthatóság megállapításához tekintjük például az α síkra illeszkedő BC él és a β síkra illeszkedő PR él (kiterő élek) látszólagos metszéspontjában lévő II. fedő pontpárt. A rendező segítségével megkapjuk az I. képeket. Leolvashatjuk, hogy a PR élen lévő pont I. rendezője hosszabb, mint a BC -re illeszkedő, tehát PR a vizsgált pont közelében előlnezetben eltakarja BC -t. Így az x metszésvonalnak a fedő pontpárral azonos oldalán a β sík takarja el α -t, míg a másik oldalon éppen fordított a helyzet. A fedő pontpár oldalán tehát a β síkra illeszkedő PQR háromszög lemez éleinek kihúzása kap "elsőbbséget", a másik oldalon pedig az α -ra illeszkedő $ABCD$ paralelogramma éleié.

Az I. képen hasonló elvet követve az AB és PQ élek I. fedő pontpárjának vizsgálatából indultunk ki, megállapítva, hogy ott a PQ él pontja van magasabban, és így eltakarja az AB -n lévő pontot. A pontpár oldalán tehát a háromszögnek lesz elsőbbsége a kihúzás során, míg a másik oldalon a paralelogrammának.