Részlet Dr. Reiman István és Dr. Nagyné dr. Szilvási Márta GEOMETRIAI FELADATOK c. jegyzetéből

TARTALOMJEGYZÉK

	Fejezet címe	Feladat	Oldalszám (jegyzetben)	Oldalszám (PDF-ben)
GÖRBÉK	Ruletták	1 - 10	121 - 122	2 - 3
	Görbék egyenlete, érintő	11 - 28	122 - 125	3 - 4
	Ívhossz	29 - 36	125 - 126	4 - 5
	Kisérő triéder	37 - 52	126 - 129	5 - 6
	Görbület, torzió, Frenet képletek	53 - 77	129 - 132	6 - 8
FELÜLETEK	Felületek egyenletei, lefejthető vonalfelületek	78 - 109	133 - 136	8 - 10
	Felületi normális, érintősík	110 - 132	136 - 139	10 - 11
	Felületi görbék görbülete	133 - 139	139 - 140	11 - 12
	Főgörbületek, főirányok	140 - 150	141 - 143	12 - 13
	Felületi pontok osztályozása	151 - 164	143 - 144	13 - 14
MEGOLDÁSOK	Ruletták	1 - 10	145 - 148	14 - 16
	Görbék egyenlete, érintő	11 - 28	149 - 153	16 - 18
	Ívhossz	29 - 36	154	19
	Kisérő triéder	37 - 52	154 - 157	19 - 20
	Görbület, torzió, Frenet képletek	53 - 77	157 - 162	20 - 23
	Felületek egyenletei, lefejthető vonalfelületek	78 - 109	163 - 173	23 - 28
	Felületi normális, érintősík	110 - 132	174 - 180	29 - 32
	Felületi görbék görbülete	133 - 139	180 - 182	32 - 33
	Főgörbületek, főirányok	140 - 150	182 - 185	33 - 34
	Felületi pontok osztályozása	151 - 164	185 - 186	34 - 35

részlet

Dr. Reiman István

Dr. Nagyné dr. Szilvási Márta

GEOMETRIAI FELADATOK

c. jegyzetéből

(Tankönyvkiadó, Budapest, 1991)

Ruletták

1. Adott a sugarú kör csúszás nélkül gördül egy egyenes mentén. Irjuk fel a kör egy rögzitett kerületi pontja által leirt pálya egyenletét (ciklois).

2. Adott a sugarú kör csúszás nélkül gördül egy egyenesen. Irjuk fel egy olyan pont pályájának az egyenletét, amely a kör középpontjától d távolságra van és a mozgás közben a körhöz viszonyitott helyzete nem változik (d < a esetén nyújtott, d > a esetén hurkolt ciklois).

3. Állitsuk elő a kör lefejtésének paraméteres egyenletrendszerét, azaz egy mozdulatlan kör alakú tárcsára szorosan feltekert fonál végpontja által leirt görbe egyenletét, miközben a fonalat feszesen tartva legombolyitjuk (körevolvens).

4. Tekintsünk egy adott a sugarú kör kerületén csúszás nélkül gördülő egyenest, amelyhez egy rá merőleges, d hosszúságú szakaszt rögzitettünk. Irjuk fel a szakasz végpontja által leirt görbe egyenletét! Milyen görbét kapunk d = a esetén?

5. Egy r sugarú kör csúszás nélkül végiggördül a mozdulatlan R sugarú körön mindig kivülről érintve azt. Irjuk fel a gördülő kör egy rögzitett kerületi pontja által leirt pálya egyenletét (epiciklois).
Milyen görbe adódik r = R esetén?

6. Egy r sugarú kör csúszás nélkül végiggördül az R > r sugarú kör kerületén mindig belülről érintve azt. Irjuk fel a gördülő kör egy rögzitett kerületi pontja által leirt pálya egyenletét (hipociklois).
Milyen görbe adódik az R = 4r és az R = 2r esetekben?

7. Egy 2r sugarú kör kerületén végiggördül egy r suga-

rú kör mindig belülről érintve azt. Mutassuk meg, hogy a gördülő körhöz képest rögzitett helyzetü, de nem a kerületén fekvő pont ellipszist ir le.

8. Bizonyitsuk be, hogy a ciklois tetszőleges pontjában húzott normális áthalad a cikloist előállitó kör legalsó, az érintő pedig a legfelső pontján (lásd az 1. feladatot!). Ezt a tulajdonságát felhasználva szerkesszük meg a ciklois tetszőleges pontjához tartozó normálisát és érintőjét.

9. Bizonyitsuk be, hogy az

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

körevolvens összes normálisának a koordinátarendszer origójából mért távolsága egyenlő.

10. Bizonyitsuk be, hogy az

$$x = a \cos^3 t, \qquad y = a \sin^3 t$$

asztroid érintőjének a koordinátatengelyek közé eső szakasza az érintési ponttól függetlenül a hosszúságú.

Görbék egyenlete, érintő

Adjuk meg a görbét az $\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$ függvénnyel, ekkor az érintőegyenes egyenletrendszere

$$\underline{R} = \underline{r} + \tau\dot{\underline{r}} \qquad \text{vagy} \qquad \frac{X - x}{\dot{x}} = \frac{Y - y}{\dot{y}} = \frac{Z - z}{\dot{z}},$$

ahol $\underline{R} = X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k}$ az érintő futó pontjának helyvektora.

11. Ha egy pont egyenletes körmozgást végez egy bizonyos egyenes körül, és ugyanakkor egyenletes egyenesvonalú mozgással halad az egyenessel párhuzamosan, akkor a pályáját hengeres csavarvonalnak nevezzük. Válasszuk z tengelynek az adott egyenest és irjuk fel a hengeres csavarvonalat előállitó vektor-skalár függvényt.

Határozzuk meg a csavarvonalnak a koordinátasikokra

eső merőleges vetületeit!

12. Viviani-féle görbének nevezzük egy gömbfelületnek és egy olyan körhengerfelületnek a metszésvonalát, amelynek egyik alkotója áthalad a gömb középpontján és átmérője a gömb sugarával egyenlő. Adjuk meg ezt a görbét egy vektor-skalár függvénnyel.

Mutassuk meg, hogy a Viviani görbe illeszkedik egy olyan kúpfelületre is, amelynek csúcsa a henger- és gömbfelület érintési pontja és tengelye a henger tengelyével párhuzamos.

13. A z tengelyt hegyes szögben metsző egyenes állandó szögsebességgel forog a z tengely körül. Irjuk fel annak a pontnak a pályaegyenletét, amely ezen egyenes mentén állandó sebességgel mozog (kúpos csavarvonal).

14. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, a \sin t \cos t + \underline{j}\, a \sin^2 t + \underline{k}\, a \cos t$$

görbe egy origó középpontú, a sugarú görbfelületre illeszkedik.

15. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, a \cos^3 t + \underline{j}\, a \sin^3 t + \underline{k}\, a \cos 2t$$

görbe egy asztroid vezérgörbéjü, z tengelyü hengerfelület véges darabján helyezkedik el.

16. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} + t^2\underline{j} + t^3\underline{k}$$

görbének a koordinátasikokra eső merőleges vetületeit.

17. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = e^t\underline{i} + e^{-t}\underline{j} + t^2\underline{k}$$

térgörbe érintőjének egyenletrendszerét a $t = 1$ paraméterü pontjában.

18. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, a(t - \sin t) + \underline{j}\, a(1 - \cos t) + \underline{k}\, 4a \sin \frac{t}{2}$$

görbe $t = \frac{\pi}{2}$ pontjához tartozó érintőjének egyenletrendszerét. Mekkora szöget zár be ez az érintő a z tengellyel?

19. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \frac{t^4}{4}\,\underline{i} + \frac{t^3}{3}\,\underline{j} + \frac{t^2}{2}\,\underline{k}$$

térgörbe azon érintőit, amelyek párhuzamosak az $x + 3y + 2z = 0$ egyenletü síkkal.

20. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = (3t - t^3)\underline{i} + 3t^2\underline{j} + (3t + t^3)\underline{k}$$

görbének azokat a pontjait, amelyekben az érintő párhuzamos a $3x + y + z + 2 = 0$ egyenletü síkkal!

21. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyekben a hengeres csavarvonal érintői az xy koordinátasikot metszik (lásd a 11. feladatot!).

22. Milyen görbét alkotnak az

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} + t^2\underline{j} + t^3\underline{k}$$

görbe érintőinek az xy koordinátasikkal való metszéspontjai?

23. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyekben az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, a \cos t - \underline{j}\, a \sin t + \underline{k}\, b\, e^t$$

görbe érintői az xy koordinátasikot metszik.

24. Irjuk fel azon pontok mértani helyének egyenletét, amelyekben az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, a(\sin t + \cos t) + \underline{j}\, a(\sin t - \cos t) + \underline{k}\, b\, e^{-t}$$

görbe érintői az xy koordinátasikot metszik.

25. Bizonyitsuk be, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos t + \underline{j}\, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin t + \underline{k}\, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}$$

görbe illeszkedik az

$$x^2 + y^2 = z^2$$

kúpfelületre és annak minden alkotóját 45°-os szögben metszi. (Ezt a görbét kúpos spirálisnak nevezik.)

26. Határozzuk meg a Viviani-féle görbe érintőinek az őt tartalmazó hengerfelület alkotóival bezárt legkisebb szögét. (lásd a 12. feladatot!).

27. Irjuk fel az $x^2 + y^2 - 8 = 0$ és az $xy - z + 2 = 0$ felületek metszésvonalának érintővektorát a P(2,2,6) pontban.

28. Irjuk fel a $z^2 + 2x - y^2 = 0$, $3x + y - z = 0$ egyenletrendszerrel adott görbe P(0,1,1) pontjában az érintőegyenes egyenletrendszerét.

Ivhossz

Az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel adott görbe t_1 és t_2 paraméterü pontjai köré eső darabjának ivhossza

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\underline{r}}|\, dt.$$

29. Számitsuk ki az

$$\underline{r}(t) = at\underline{i} + \sqrt{3ab}\, t^2\underline{j} + 2bt^3\underline{k}$$

térgörbe $0 \leq t \leq 1$ szakaszának az ivhosszát.

30. Számitsuk ki az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, a \cos t + \underline{j}\, a \sin t + \underline{k}\, b\, t$$

hengeres csavarvonal tetszőleges pontja és a $t = 0$ paraméterü pontja közé eső darabjának az ivhosszát.

31. Irjuk fel a hengeres csavarvonal paraméteres egyenletrendszerét, ha az ivhosszat választjuk paraméternek.

32. Irjuk fel a kör paraméteres egyenletét úgy, hogy az ívhossz legyen a paraméter.

33. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(s) = \underline{i}\sin\frac{s}{3} + \underline{j}\cos\frac{s}{3} + \underline{k}\frac{\sqrt{8}}{3}s$$

térgörbe paraméterezése a természetes paraméter.

34. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(s) = \underline{i}\frac{s}{\sqrt{3}}\cos\ln\frac{s}{\sqrt{3}} + \underline{j}\frac{s}{\sqrt{3}}\sin\ln\frac{s}{\sqrt{3}} + \underline{k}\frac{s}{\sqrt{3}}$$

térgörbe paraméterezése a természetes paraméter.

35. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\cos t + \underline{j}\sin t + \underline{k}\,\mathrm{ch}\,t$$

térgörbe egyenletét a $t = 0$ paraméterű ponttól mért ívhossz függvényében.

36. Irjuk fel a körevolvens egyenletét természetes paraméterezésben (lásd a 3. feladatot!).

Kisérő triéder

Az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel adott görbe kisérő triéderének élvektorai az érintő, a főnormális és a binormális egységvektor, amelyek a következőképpen számithatók ki:

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|}, \qquad \underline{n} = \frac{(\dot{\underline{r}}\times\ddot{\underline{r}})\times\dot{\underline{r}}}{|(\dot{\underline{r}}\times\ddot{\underline{r}})\times\dot{\underline{r}}|}, \qquad \underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}}\times\ddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}\times\ddot{\underline{r}}|}.$$

A kisérő triéder síkjai áthaladnak a görbe adott pontján. A simulósik normálisa párhuzamos az $\dot{\underline{r}}\times\ddot{\underline{r}}$, a normálsiké az $\dot{\underline{r}}$, a rektifikáló siké pedig az $(\dot{\underline{r}}\times\ddot{\underline{r}})\times\dot{\underline{r}}$ vektorral, és ezen vektorok ismeretében a síkok egyenlete felirható.

37. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t+3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}$$

térgörbe kisérő triéderének élvektorait és síkjainak egyenletét a görbe $t = -1$ paraméterű pontjában.

38. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\,t\sin t + \underline{j}\,t\cos t + \underline{k}\,t\,e^t$$

görbe kisérő triéderének élvektorait a koordinátarendszer kezdőpontjában.

39. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\,t\cos t - \underline{j}\,t\sin t + \underline{k}\,t$$

görbe simulósikjának az egyenletét a $t = 0$ paraméterű pontjában.

40. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = (t^3 - 2)\underline{i} + (t+1)\underline{j} + \frac{t^3}{3}\underline{k}$$

térgörbe $t = 1$ paraméterű pontjában a kisérő triéder síkjainak egyenletét.

41. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} + t^2\underline{j} + e^t\underline{k}$$

térgörbe $t = 0$ paraméterű pontjában a kisérő triéder élegyeneseinek egyenletrendszerét.

42. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \frac{2}{t}\underline{i} + \ln t\,\underline{j} - t^2\underline{k}$$

görbének azokat a pontjait, amelyekben a binormális párhuzamos az $x - y + 8z + 2 = 0$ egyenletü síkkal.

43. Számitsuk ki az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\cos^2 t + \underline{j}\frac{1}{2}\sin 2t + \underline{k}\cos t$$

görbe $t = 0$ paraméterü pontjához tartozó simulósikjának az origótól mért távolságát.

44. Bizonyitsuk be, hogy a hengeres csavarvonal kisérő triéderének élvektorai a csavarvonal tengelyével állandó szöget alkotnak (lásd a 11. feladatot!).

45. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, e^t \cos t + \underline{j}\, e^t \sin t + \underline{k}\, e^t$$

egyenletű kúpos spirális kisérő tricderének élvektorai állandó szöget zárnak be a z tengellyel.

46. Igazoljuk, hogy az

$$\underline{r}(t) = (t^2 - 2t)\underline{i} + (3t - 5)\underline{j} - (t^2 + 2)\underline{k}$$

függvény síkgörbét állit elő, és irjuk fel a görbe síkjának egyenletét!

47. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = \frac{1+t}{1-t}\,\underline{i} + \frac{1}{1-t^2}\,\underline{j} + \frac{t}{1+t}\,\underline{k}$$

függvénnyel előállitott görbe síkgörbe, és irjuk fel a síkjának egyenletét!

48. Mutassuk meg, hogy a Viviani-féle görbe normálsikjai áthaladnak a görbét tartalmazó gömb középpontján (lásd a 42. feladatot!).

49. A hengeres csavarvonal főnormálisaira állandó hosszúságú szakaszokat mérünk fel. Bizonyitsuk be, hogy ezeknek a szakaszoknak a végppontjai egy másik hengeres csavarvonalon helyezkednek el (lásd a 11. feladatot!).

50. Bizonyitsuk be, hogy az

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} + t^2\underline{j} + t^3\underline{k}$$

görbe O(0,0,0) pontbeli $\underline{t}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$ vektorai egybeesnek a koordinátatengelyek egységvektoraival. Irjuk fel a görbének az O pontbeli kisérő triéder síkjaira eső merőleges vetületeinek egyenletét.

51. Irjuk fel az $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ és az $x^2 - y^2 = 3$ felületek metszésvonalaként adódó görbe simulósikjának az egyenletét az M(2,1,2) pontban.

52. Irjuk fel az $x = y^2$ és $x^2 = z$ felületek metszésvonalának M(1,1,1) pontjában a főnormális és a binormális egyenesek egyenletrendszerét.

Görbület, torzió, Frenet képletek

Az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel adott görbe görbülete a $G = \dfrac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3}$ képlettel, a torziója pedig a $T = \dfrac{\dddot{\underline{r}}\,\dot{\underline{r}}\,\ddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|^2}$ képlettel számitható ki.

A Frenet képletek a következők:

$$\underline{t}' = G\underline{n},$$

$$\underline{n}' = -T\underline{t} + G\underline{b},$$

$$\underline{b}' = -T\underline{n},$$

ahol a vessző a természetes paraméter (ivhossz) szerinti deriválást jelöli.

53-57. Számitsuk ki az alábbi görbék görbületét és torzióját a megadott pontban:

53. $\underline{r}(t) = (t^2 - 1)\underline{i} + (t + 2)\underline{j} + (t^3 - t)\underline{k}$, $t = 1$.

54. $\underline{r}(t) = 2t\underline{i} + \ln t\,\underline{j} + t^2\underline{k}$, $t = 1$.

55. $\underline{r}(t) = e^t\underline{i} + e^{-t}\underline{j} + \sqrt{2}t\,\underline{k}$, $t = 0$.

56. $\underline{r}(t) = \underline{i}\, t\cos t + \underline{j}\, t \sin t + \underline{k}\, at$, $t = 0$.

57. $\underline{r}(t) = \underline{i} \sin 2t + \underline{j}(1 - \cos 2t) + \underline{k}\, 2\cos t$, $t = \frac{\pi}{2}$.

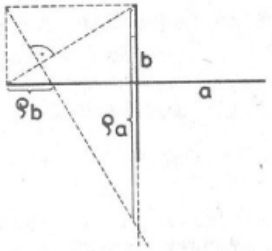
58. Mutassuk meg, hogy az $y = f(x)$ függvénnyel adott görbe görbülete

$$G = \frac{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

képlettel számítható minden olyan pontban, amelynek környezetében a függvény kétszer folytonosan differenciálható.

59. Számítsuk ki az $y^2 = 2px$ parabola görbületét a csúcspontjában.

60. Bizonyítsuk be, hogy az ellipszis nagy- és kistengelyének végpontjában a görbületi sugarak az alábbi ábra szerint szerkeszthetők:



61. Számítsuk ki a hengeres csavarvonal görbületét és torzióját a görbe tetszőleges pontjában (lásd a 12. feladatot!).

62. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(t) = (3t - t^3)\underline{i} + 3t^2\underline{j} + (3t + t^3)\underline{k}$$

görbe görbülete és torziója tetszőleges paraméterértékre egymással egyenlő.

63. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\cos^3 t + \underline{j}\sin^3 t + \underline{k}\cos 2t$$

görbének azokat a pontjait, amelyekben a görbületnek lokális minimuma van.

64. Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyekben az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\ a(t - \sin t) + \underline{j}\ a(1 - \cos t) + \underline{k}\ 4a\cos\frac{t}{2}$$

görbe görbületi sugarának lokális minimuma van.

65. Határozzuk meg a Viviani-féle görbének azokat a pontjait, amelyekben a görbületének szélsőértéke van (lásd a 12. feladatot!).

66. Számítsuk ki az

$$\underline{r}(t) = \frac{1}{t}\underline{i} + t^2\underline{j} + (2 + t^2)\underline{k}$$

térgörbe görbületi középpontját a $t = 1$ paraméterű pontban.

67-69. Írjuk fel az alábbi térgörbék tetszőleges pontjaihoz tartozó görbületi középpontok helyvektorát:

67. $\underline{r}(t) = \underline{i}\ a\cos t + \underline{j}\ a\sin t + \underline{k}\ b\ t$

hengeres csavarvonal.

68. $\underline{r}(t) = \underline{i}\ e^t\cos t + \underline{j}\ e^t\sin t + \underline{k}\ e^t$

kúpos spirális.

69. $\underline{r}(t) = e^t\underline{i} + e^{-t}\underline{j} + \sqrt{2}t\ \underline{k}$.

70. Bizonyítsuk be, hogy a ciklois görbületi középpontjai az eredetivel egybevágó cikloist alkotnak (lásd az 1. feladatot!).

71. Számítsuk ki az $x^2 - 3y^2 - z = 0$ felület és az $x + y + z - 4 = 0$ sík metszésvonalának görbületét a P(2,1,1) pontban.

72. Számítsuk ki az $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ és az $y^2 - 2x + z = 0$ felületek metszésvonalának görbületét és torzióját a P(1,1,1) pontban.

73. Írjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\ a\ \mathrm{ch}\ t + \underline{j}\ a\ \mathrm{sh}\ t + \underline{k}\ at$$

görbe természetes egyenleteit.

74. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}(2t - \sin 2t) + \underline{j}\cos 2t + \underline{k}\ 4\sin t$$

görbe $t = \frac{\pi}{2}$ paraméterű pontjában a $\underline{t}'$, $\underline{n}'$, $\underline{b}'$ vektorokat.

75. Irjuk fel a Frenet-képleteket az

$$\underline{r}(t) = \frac{t^2}{2}\,\underline{i} + \frac{2t^3}{3}\,\underline{j} + \frac{t^4}{4}\,\underline{k}$$

térgörbe $t = 1$ paraméterű pontjában.

76. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = (t^2 - 1)\underline{i} + (t + 2)\underline{j} + (t^3 - t)\underline{k}$$

térgörbe $t = 1$ pontjában a Darboux-féle vektort.

77. Bizonyitsuk be, hogy ha a térgörbét az $\underline{r}(s)$ ivhossz szerint paraméterezett vektor-skalár függvény határozza meg, akkor a görbe tetszőleges pontjában teljesülnek az alábbi azonosságok:

$$\underline{r}'\underline{r}''' = -G^2,$$

$$\underline{t}\underline{b}\underline{b}' = T,$$

$$\underline{r}''\cdot\underline{r}''' = G\cdot G'.$$

Felületek egyenletei, lefejthető vonalfelületek

A vonalfelületet az $\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v\underline{l}(u)$ vektoregyenlettel adhatjuk meg, ahol $\underline{r}(u)$ a vezérgörbe egyenlete, $\underline{l}(u)$ pedig az alkotóegyenes irányvektora. A vonalfelületet lefejthetőnek nevezzük, ha mindegyik pontjában $\dot{\underline{r}}\underline{l}\dot{\underline{l}} = 0$ teljesül, ahol

$$\dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{du} \quad \text{és} \quad \dot{\underline{l}} = \frac{d\underline{l}}{du}\,.$$

78. Irjuk fel az A(2,3,5), B(4,5,-6), C(1,3,2) pontokra illeszkedő sik két paraméteres vektoregyenletét.

[79-81.] Irjuk fel a hengerfelület paraméteres egyenletrendszerét és implicit egyenletét, ha adott a vezérgörbéje és az alkotóegyeneseinek $\underline{a}$ irányvektora:

79. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = 4\cos^3 u\,\underline{i} + 4\sin^3 u\,\underline{j}$, $\underline{a} = 3\underline{i} + 2\underline{j} + 4\underline{k}$.

80. vezérgörbe: $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$, $\underline{a} = \underline{k}$.

81. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = \underline{j}\,2\cos u + \underline{k}\,3\sin u$, $\underline{a} = \underline{i}$.

[82-84.] Irjuk fel a kúpfelület egyenletét paraméteres és implicit alakban, ha adott a vezérgörbéje és a csúcspontja:

82. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = \underline{i}\cos u + \underline{j}\sin u$, C(0,0,1).

83. vezérgörbe: $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $z = 0$, C(2,5,-3).

84. vezérgörbe: $z = x^2$, $y = -1$, C(2,3,-4).

[85-86.] Irjuk fel annak a kúpfelületnek a kétparaméteres vektoregyenletét, amelynek adott a vezérgörbéje és a csúcspontja:

85. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = 2(\sin u - u\cos u)\underline{i} + 2(\cos u + u\sin u)\underline{k}$, $C(0,-8,0)$.

86. vezérgörbe: $\underline{r}(u) = \underline{i}\,R\cos^2 u + \underline{j}\,R\cos u\sin u + \underline{k}\,R\sin u$, $C(0,0,0)$.

[87-97.] Irjuk fel a forgásfelület egyenletét, ha adott a meridiángörbéje és a forgástengelye:

87. meridiángörbe az xz koordinátasikban elhelyezkedő, $A(a,0,0)$ középpontú, b sugarú kör $(a > b > 0)$, forgástengely a z tengely.

88. meridiángörbe az xz koordinátasikban elhelyezkedő origó középpontú, R sugarú kör, forgástengely az x tengely.

89. meridiángörbe: $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$, $z = 0$, forgástengely az y tengely.

90. meridiángörbe: $2y - 3z = 7$, $x = 0$, forgástengely az y tengely.

91. meridiángörbe: $z = y^2 + 1$, $x = 0$, forgástengely a z tengely.

92. meridiángörbe: $\underline{r}(u) = (3 + 2\cos u)\underline{i} + (4 + 2\sin u)\underline{j}$, forgástengely az y tengely.

93. meridiángörbe: $\underline{r}(u) = \underline{i}\,5\cos^3 u + \underline{k}\,5\sin^3 u$, forgástengely a z tengely.

94. meridiángörbe: hiperbola, forgástengely a képzetes tengelye.

95. meridiángörbe: hiperbola, forgástengely a valós tengelye.

96. meridiángörbe: $z = \sin y$, forgástengely az y tengely.

97. meridiángörbe: $\underline{r}(u) = (2\cos u - \cos 2u)\underline{i} + (2\sin u - \sin 2u)\underline{j}$, forgástengely az x tengely.

98. Irjuk fel az

$$\underline{r}(u) = u\underline{i} + u^2\underline{j} + u^3\underline{k}$$

görbe érintőegyenesei által alkotott felület kétparaméteres vektoregyenletét.

99. Irjuk fel az

$$\underline{r}(u) = \underline{i}\,R\cos^2 u + \underline{j}\,R\cos u\sin u + \underline{k}\,R\sin u$$

egyenletü Viviani görbe érintőegyenesei által alkotott vonalfelület kétparaméteres vektoregyenletét.

100. Irjuk fel az

$$\underline{r}(t) = \underline{i}a\cos t + \underline{j}a\sin t + bt\underline{k}$$

hengeres csavarvonal binormálisai által alkotott felület kétparaméteres vektoregyenletét. Állapitsuk meg, hogy lefejthető-e a kapott vonalfelület.

[101-106.] Állapitsuk meg, hogy az alábbi függvények milyen felületet határoznak meg és milyen görbék a paramétervonalak:

101. $\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + v\underline{j} + uv\underline{k}$.

102. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}v\cos u + \underline{j}v\sin u + \underline{k}v$.

103. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}v\cos u + \underline{j}v\sin u + \underline{k}u$.

104. $\underline{r}(u,v) = (u + \sin v)\underline{i} + (u + \cos v)\underline{j} + (u + a)\underline{k}$.

105. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}a\operatorname{ch} u\cos v + \underline{j}b\operatorname{ch} u\sin v + \underline{k}c\operatorname{sh} u$, $(a, b, c > 0)$.

106. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}u\cos v + \underline{j}u\sin v + \underline{k}u^2$.

107. Bizonyitsuk be, hogy egy térgörbe érintőegyeneseiből álló vonalfelület lefejthető felület.

108. Bizonyitsuk be, hogy egy vonalfelület pontosan akkor lefejthető, ha minden érintősikja egy-egy alkotóegyenese mentén érinti.

109. Bizonyitsuk be, hogy bármely lefejthető vonalfelület vagy hengerfelület, vagy kúpfelület, vagy egy térgörbe érintőegyeneseiből áll.

Felületi normális, érintősik

Az $\underline{r}(u,v)$ kétparaméteres vektorfüggvénnyel adott felület normálvektora $\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v$, az érintősik egyenlete pedig $(\underline{R} - \underline{r})\underline{r}_u\underline{r}_v = 0$, ahol $\underline{R}(X,Y,Z)$ a sik futó pontjának koordinátái.
$z = f(x,y)$ függvénnyel adott felület normálvektora $\underline{m}(-p,-q,1)$, érintősikjának egyenlete $Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$, ahol

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ha a felületnek az $F(x,y,z) = 0$ alakú implicit egyenletét ismerjük, akkor a felületi normálist $\underline{m}(F'_x,F'_y,F'_z)$, az érintősik egyenletét pedig $(X - x)F'_x + (Y - y)F'_y + (Z - z)F'_z = 0$ alakban irhatjuk fel.

110. Irjuk fel az

$$\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + (1 + u)\cos v\,\underline{j} + (1 + u)\sin v\,\underline{k}$$

felület $u = 1$, $v = \frac{\pi}{3}$ paraméterü pontján áthaladó paramétervonalainak egyenletét és számitsuk ki a paramétervonalak érintőinek hajlásszögét az adott pontban.

111. Számitsuk ki az

$$\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + \cos u \sin v\,\underline{j} + \cos u \cos v\,\underline{k}$$

egyenletü felület $u = \frac{\pi}{4}$, $v = \frac{\pi}{3}$ pontjában a paramétervonalainak érintői által bezárt szöget.

112. Irjuk fel az

$$\underline{r}(u,v) = (2u - v)\underline{i} + (u^2 + v^2)\underline{j} + (u^3 - v^3)\underline{k}$$

egyenletü felület $P(3,5,7)$ pontjában a paramétervonalak érintőegyeneseinek egyenletrendszerét.

113. Irjuk fel az

$$\underline{r}(u,v) = (u^2 - v^2)\underline{i} + 2uv\,\underline{j} + (u^2 + v^2)\underline{k}$$

egyenletü felület $u = 1$, $v = 2$ paraméterü pontjában a felületi normális egyenesének egyenletrendszerét.

[114-124.] Irjuk fel az alábbi felületek megadott pontjában az érintősik egyenletét:

114. $\underline{r}(u,v) = (u^3 - 2v^2)\underline{i} + uv^2\underline{j} + (u^2v - u)\underline{k}$; $u = 1$, $v = -2$.

115. $\underline{r}(u,v) = (\cos u - v\sin u)\underline{i} + (\sin u - v\cos u)\underline{j} + (u + v)\underline{k}$; $u = 0$, $v = 1$.

116. $\underline{r}(u,v) = u^4\underline{i} + 3uv^2\underline{j} + v^3\underline{k}$; $u = 2$, $v = 1$.

117. $\underline{r}(u,v) = (u + v)\underline{i} + (u^2 + v^2)\underline{j} + (u^3 + v^3)\underline{k}$; $u = 2$, $v = 2$.

118. $\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + (u^2 - 2v)\underline{j} + (u^3 - 3uv)\underline{k}$; $P(1,3,4)$.

119. $xy^2 + z^3 = 12$; $P(1,2,2)$.

120. $z = x^3 + y^3$; $P(1,2,9)$.

121. $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$; $P(3,1,-1)$.

122. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$; $M(3,4,12)$.

123. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}\,u\cos v + \underline{j}\,u\sin v + \underline{k}\,av$; $u = u_0$, $v = v_0$.

124. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $P(x_o,y_o,z_o)$.

125. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u,v) = (u + v)\underline{i} + (u - v)\underline{j} + uv\,\underline{k}$$

felületnek az $x + 2y + 2z = 32$ sikkal párhuzamos érintősikját.

126. Mutassuk meg, hogy a $xyz = a^3$ felület érintősikjai a koordinátasikokkal állandó térfogatú tetraédereket alkotnak.

127. Irjuk fel az $xyz = 1$ felület $x + y + z - 3 = 0$ sikkal párhuzamos érintősikjának az egyenletét.

128. Mutassuk meg, hogy az

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$$

felület érintősikjai által a koordinátatengelyekből kimetszett szakaszok négyzetösszege állandó.

129. Bizonyitsuk be, hogy a

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

egyenletü felület érintősikjai a koordinátatengelyekből állandó összegü darabokat vágnak le.

130. Az $x^n + y^n + z^n = a^n$ egyenletü felület $P(x_o,y_o,z_o)$ pontjához tartozó érintősik messe a koordinátatengelyeket rendre az A,B,C pontokban. Bizonyitsuk be, hogy

$$\frac{x_o}{OA} + \frac{y_o}{OB} + \frac{z_o}{OC} = 1$$

teljesül, ahol O a koordinátarendszer kezdőpontja.

131. Bizonyitsuk be, hogy a csavarvonal érintőegyenesei által előállitott vonalfelület normálisai a z-tengellyel állandó szöget zárnak be.

132. Bizonyitsuk be, hogy a $z = tgxy$ és az $x^2 - y^2 =$ a felületek érintősikjai a két felület metszésvonalának pontjaiban merőlegesek egymásra.

Felületi görbék görbülete

Az $\underline{r}(u,v)$ kétparaméteres vektorfüggvénnyel előállitott felület normálmetszetéhez jutunk, ha az $\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v$ felületi normálisra és az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}}$ hányadossal jellemzett $\underline{r}_u\dot{u} + \underline{r}_v\dot{v}$ érintőirányra illeszkedő normálsikkal metsszük a felületet. A normálmetszet görbülete

$$\frac{1}{R_n} = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} .$$

Ugyenerre az érintőirányra illeszkedő ferdemetszet görbülete

$$\frac{1}{R_\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi \cdot R_n} ,$$

ahol φ a ferdemetszet sikjának a normálmetszet sikjával alkotott hajlásszöge.
A képletekben szereplő Gauss-féle főmennyiségek a következők:

$$E = \underline{r}_u^2 \ , \ F = \underline{r}_u\underline{r}_v \ , \ G = \underline{r}_v^2 \ ,$$

$$L = \underline{m}^o\underline{r}_{uu} \ , \ M = \underline{m}^o\underline{r}_{uv} \ , \ N = \underline{m}^o\underline{r}_{vv} \ ,$$

ahol

$$\underline{m}^o = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|} .$$

133. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u,v) = e^u\underline{i} + e^v\underline{j} + (u - v)\underline{k}$$

felület $u = 0$, $v = 0$ paraméterü pontjában az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = 2$ érintőirányra illeszkedő, a normálsikkal $\varphi = 30^o$-os szöget alkotó sikban fekvő ferdemetszet görbületét.

134. Adott a $z = 2x^2 + 4{,}5\,y^2$ felület. Számitsuk ki a koordinátarendszer kezdőpontjában az x tengellyel 45°-os szöget bezáró érintőirányú normálmetszet görbületi sugarát.

135. Adott az

$$\underline{r}(u,v) = (u^2 + v^2)\underline{i} + (u^2 - v^2)\underline{j} + uv\,\underline{k}$$

felületen a P(u = 1, v = 1) pont. Számitsuk ki a P pontban az

$$\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \frac{1}{2}$$

hányadossal jellemzett érintőirányhoz tartozó normálmetszet görbületét.

136. Számitsuk ki az

$$\underline{r}(u,v) = (u^2 - 2uv)\underline{i} + (u^2v^2 - v^3)\underline{j} + (u^4 - 2v^2)\underline{k}$$

felület u = 1, v = −1 pontjában az $\dot{\underline{r}}(2,-11,z)$ érintővektorú normálmetszet görbületét.

137. Számitsuk ki az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\,\mathrm{chu}\cos v + \underline{j}\,\mathrm{shu}\sin v + \underline{k}\,\mathrm{thuv}$$

felület u = 0, $v = \frac{\pi}{2}$ paraméterü pontján áthaladó, az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = 2$ hányadossal és $\varphi = 45^\circ$-os szöggel jellemzett ferdemetszet görbületét.

138. Számitsuk ki a $z = \sqrt{2xy}$ felület P(2,4,4) pontján áthaladó, az $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = 1$ hányadossal és $\varphi = 120^\circ$-os szöggel jellemzett ferdemetszet görbületét.

139. Számitsuk ki a gömbfelület tetszőleges pontjában az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \lambda$ hányadossal jellemzett érintőirányú normálmetszetének és a $\varphi < 90^\circ$-os szöggel jellemzett ferde metszetének görbületét. (Lásd a 88. feladatot.)

Főgörbületek, főirányok

A felület adott pontján áthaladó normálmetszetek görbületeinek $\frac{1}{R_1}$ és $\frac{1}{R_2}$ szélsőértékeit (ha léteznek) a pontbeli főgörbületeknek, azokat az érintőirányokat pedig, amelyekben ezek fellépnek, főirányoknak nevezzük. Az $\frac{\dot{u}}{\dot{v}}$ főirányok a

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

egyenletből határozhatók meg. A főgörbületek szorzatát és összegét a

$$K = \frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

képletekkel számithatjuk ki.
A felület gömbi pontján áthaladó összes normálmetszet görbülete egyenlő (és nem zérus), ezért $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$ és minden irány főirány. Az olyan pontot, amelyen áthaladó összes normálmetszet görbülete zérus, planáris pontnak nevezik.

140. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u,v) = (u + v)\underline{i} + (u - v)\underline{j} + uv\,\underline{k}$$

egyenletü felület u = 1, v = 1 paraméterü pontjában a főirányokat és a főgörbületeket.

141. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\,u\cos v + \underline{j}\,u\sin v + \underline{k}\,u$$

kúpfelület u = 1, $v = \frac{\pi}{2}$ paraméterü pontjában a főirányokat és a főgörbületeket.

142. Számitsuk ki a

$$z = x^3 - y^3$$

felület P(2,−1,9) pontjában az összeg- és szorzatgörbületet.

143. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\cos u + \underline{j}\, v + \underline{k}\sin u$$

hengerfelület tetszőleges pontjában a főirányok megegyeznek a paramétervonalak érintőirányával.

144. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(u,v) = (u^2 + v^2)\underline{i} + 2uv\underline{j} + (u - v)\underline{k}$$

felület $u = -1, v = -1$ paraméterü pontjában a főirányok a paramétervonalak szögfelezői. Irjuk fel a főirányokra illeszkedő normálmetszetek síkjainak (fősíkok) egyenletét.

145. Mutassuk meg, hogy a

$$z = e^{-(x^2 + y^2)}$$

egyenletü felületnek az $A(0,0,1)$ pontja gömbi pont.

146. Forgassuk meg az $y = \sin x$ görbét az x tengely körül és keressük meg az igy előálló felület gömbi pontjait.

147. Mutassuk meg, hogy az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\, u\cos v + \underline{j}\, u\sin v + k\underline{v}$$

csavarfelület tetszőleges pontjában az összeggörbület zérus. Állapitsuk meg, hogy hogyan helyezkednek el azok a pontok, amelyekben a szorzatgörbület állandó.

148. Forgassuk meg az $y = \operatorname{ch} x$ egyenletü láncgörbét az x tengely körül és mutassuk meg, hogy az igy keletkező katenoid minden pontjában az összeggörbület zérus.

149. Forgassuk meg az $x = a\sin u$, $y = 0$, $z = a(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u)$ egyenletrendszerü traktrixot a z tengely körül és számitsuk ki az igy keletkező pszeudoszféra szorzatgörbületét a felület tetszőleges pontjában.

150. Keressük meg a

$$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6}$$

hiperbolikus paraboloidnak azokat a pontjait, amelyekben az összeggörbület zérus.

Felületi pontok osztályozása

A felületnek azt a pontját, ahol $K > 0$, elliptikus pontnak, ahol $K < 0$, hiperbolikus pontnak és ahol $K = 0$, parabolikus pontnak nevezzük. K előjele megegyezik az $LN - M^2$ kifejezés előjelével, a $z = f(x,y)$ függvénnyel való megadás esetén pedig az

$$f''_{xx}\, f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

kvadratikus forma előjelével.

[151-153.] Határozzuk meg az alábbi felületek megadott pontjának tipusát:

151. $\underline{r}(u,v) = (u^2 + v^2)\underline{i} + uv\underline{j} + \cos u\cos v\,\underline{k}$, $u = \frac{\pi}{2}$, $v = 0$.

152. $\underline{r}(u,v) = e^u\underline{i} + e^v\underline{j} + (u - v)\underline{k}$, $u = 0$, $v = 1$.

153. $z = 4x^2y - 2xy^2$, $P(1,0,0)$.

[154-162.] Állapitsuk meg, hogy milyen jellegü pontjai vannak az alábbi felületeknek:

154. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}(a + b\cos u)\cos v + \underline{j}(a + b\sin u)\sin v + \underline{k}\, b\sin u$, $(a > b > 0)$ tórusz.

155. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}u\cos v + \underline{j}u\sin v + \underline{k}(u^2 + 1)$ forgásparaboloid.

156. $\underline{r}(u,v) = (2\cos u + v)\underline{i} + (2\sin u + v)\underline{j} + v\underline{k}$ hengerfelület.

157. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}u\cos v + \underline{j}u\sin v + \underline{k}v$ csavarfelület.

158. $z = x^2 - y^2$ hiperbolikus paraboloid.

159. $xyz = 1$.

160. $z = e^{-(x^2 + y^2)}$.

161. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

162. $z = \sin^2\sqrt{x^2 + y^2}$.

163. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u,v) = (u + v)\underline{i} + uv\underline{j} + (u^3 + v^3)\underline{k}$$

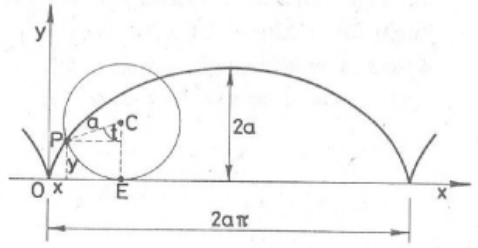
felület parabolikus pontjainak mértani helyét.

164. Határozzuk meg az

$$\underline{r}(u,v) = v^3\underline{i} + u^2\underline{j} + (u + v)\underline{k}$$

felület parabolikus pontjainak mértani helyét.

A FELADATOK MEGOLDÁSAI



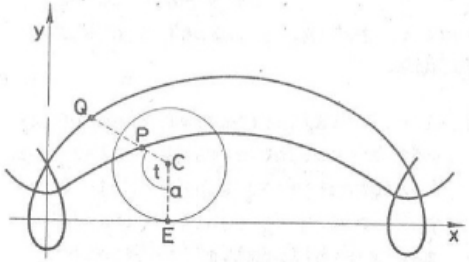
1.

1. Válasszuk x-tengelynek a rögzített egyenest, és tegyük fel, hogy a P pont a koordinátarendszer kezdőpontjából indul. Vegyük észre, hogy az OE szakasz hossza megegyezik a P és E pontok közötti köriv hosszával. A görbe P futó pontjának koordinátáit az 1. ábra segitségével irjuk fel:

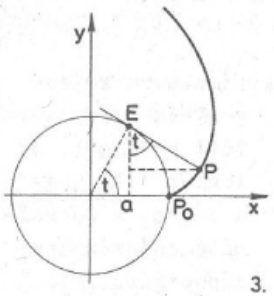
$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t).$$

2. $d < a$ esetén P, $d > a$ esetén pedig Q jelöli a görbe futó pontját (2. ábra).

$$x = at - d\sin t,$$
$$y = a - d\cos t.$$

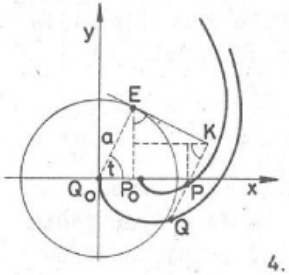


2.



3.

3. Legyen a koordinátarendszer kezdőpontja a kör középpontjában és tegyük fel, hogy a P pont a P_0 pontból indul. Használjuk fel, hogy $EP = \widehat{EP}_0 = at$ (3. ábra), ekkor $x = a(\cos t + t \sin t)$,
$y = a(\sin t - t \cos t)$.

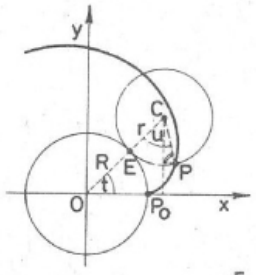


4.

4. Helyezzük a koordinátarendszer kezdőpontját a kör középpontjába (4. ábra). Az E és K pontoknál megjelölt szögek megegyeznek a t szöggel, KP = d és az EK érintőszakasz hossza at. A P pont koordinátái:

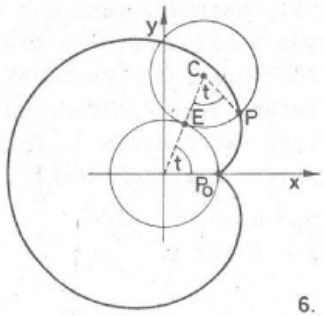
$$x = (a - d)\cos t + at \sin t,$$
$$y = (a - d)\sin t - at \cos t.$$

d = a esetén a Q pont pályája arkhimedeszi spirális, amelynek egyenlete $x = at \sin t$,
$y = -at \cos t$.
Olyan poláarkoordinátarendszerben pedig, amelynek tengelye a –y tengely, $r(\varphi) = a\varphi$ adódik.

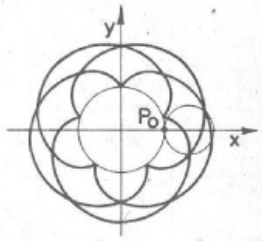


5.

5. A koordinátarendszer kezdőpontját helyezzük a mozdulatlan kör középpontjába. Tegyük fel, hogy a P pont a P_0 pontból indul ki, amely a kiindulási helyzetben egybeesik a két kör érintkezési pontjával (5. ábra). Mivel $\widehat{EP}_0 = \widehat{EP}$, azaz $Rt = r \cdot u$, $u = \frac{R}{r}t$.
A P csúcspontú megjelölt szög



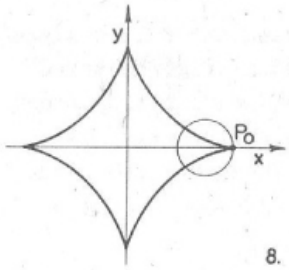
6.



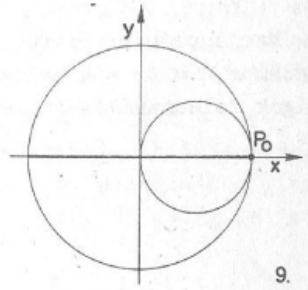
7.

$\pi - (t + u) = \pi - \frac{R + r}{r}t$, ezért a P pont koordinátái a következők: $x = (R + r)\cos t - r \cos \frac{R + r}{r}t$, $y = (R + r)\sin t -$
$- r \sin \frac{R + r}{r}t$. r = R esetén kardioidot kapunk (6. ábra).

6. $x = (R - r)\cos t + r \cos \frac{R - r}{r}t$, $y = (R - r)\sin t -$
$- r \sin \frac{R - r}{r}t$. R = 4r esetén asztroidot kapunk (8. ábra), R = 2r esetén egyenes szakaszt (9. ábra).



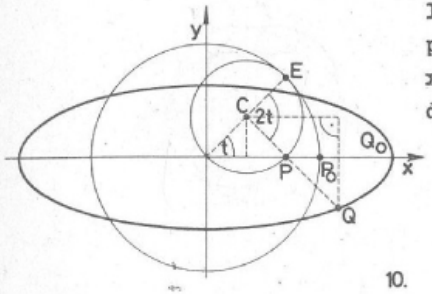
8.



9.

7. Tegyük fel, hogy a Q pont a Q_0 ponttól indul és CQ = d állandó (10. ábra). A P kerületi pont t tetszőleges értékére az x tengelyen van (lásd a 6. feladatot), ezért Q koordinátái:

$$x = (r + d)\cos t \quad \text{és}$$
$$y = (r - d)\sin t.$$



10.

8. Egy rögzitett t_0 pontban a ciklois érintőjének irányvektora $\dot{\underline{r}}(t_0) = \underline{i}\, a(1 - \cos t_0) + \underline{j}\, a \sin t_0$.
A normális egyenes egyenlete:

$$a(1 - \cos t_0)[X - a(t_0 - \sin t_0)] + a \sin t_0 [Y - a(1 - \cos t_0)] = 0,$$

amelyet az $E(at_0, 0)$ pont (1. ábra) valóban kielégit. Az érintőre vonatkozó állitás hasonlóan igazolható.

9. A normális egyenletének Hesse-féle normálalakja

$$Y \sin t + X \cos t - a = 0.$$

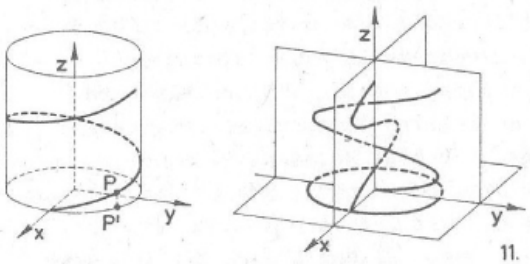
A normálisnak az origótól mért távolsága minden t-re a.

10. Megjegyzés: A 6. feladat megoldásaként felirt egyenletrendszerbe R = 4r = a helyettesités után trigonometrikus azonosságok felhasználásával az itt felirt egyenletrendszert kapjuk.

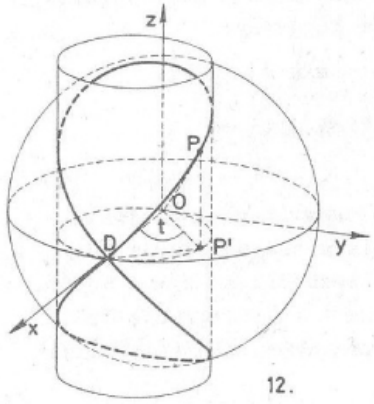
11. $\underline{r}(t) = \underline{i}\, a \cos t + \underline{j}\, a \sin t + \underline{k}\, bt$ (11. ábra).
A vetületek: $x^2 + y^2 = a^2$;

$$y = a \sin \frac{z}{b};$$

$$x = a \cos \frac{z}{b}.$$



11.



12.

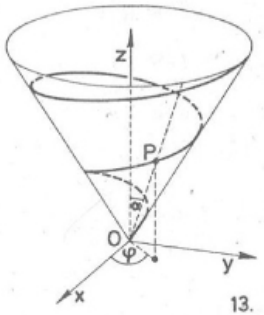
12. Ha a koordinátarendszert a 12. ábrán látható módon választjuk, a görbe egyenletrendszere $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, $x^2 + y^2 - Rx = 0$. Válasszuk paraméternek azt a t szöget, amelyet a P pont xy koordinátasikra eső merőleges vetületének helyvektora a pozitiv x tengellyel zár be. Mivel DOP' és POP' egybevágó derékszögü háromszögek, POP' szög megegyezik a t szöggel. A P pont koordinátái tehát

$$x = R \cos^2 t,\ y = R \cos t \sin t,\ z = R \sin t \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

A P pont akkor illeszkedik a D csúcspontú, z tengellyel párhuzamos tengelyü kúpfelületre, ha a $\overrightarrow{DP}$ vektornak a $\underline{k}$ egységvektorral alkotott hajlásszöge állandó. Ez pedig teljesül

$$(\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

13. Az egyenesnek a z tengellyel bezárt szöge legyen α. (13. ábra) A P pontnak az origótól mért távolságára $r = c\tau$, az xy síkra eső merőleges vetületére pedig $\varphi = \omega\tau$ teljesül, ahol c az egyenes menti egyenletes mozgás sebessége, ω pedig a z tengely körüli egyenletes forgómozgás szögsebessége. A P pont koordinátái tehát $x = c\tau \sin\alpha \cos\omega\tau$, $y = c\tau \sin\alpha \sin\omega\tau$, $z = c\tau \cos\alpha$. Az $a = \frac{c}{\omega} \sin\alpha$ és $b = \frac{c}{\omega} \cos\alpha$ állandók és a $t = \omega\tau$ paraméter bevezetése után a görbét leíró vektor-skalár függvény:

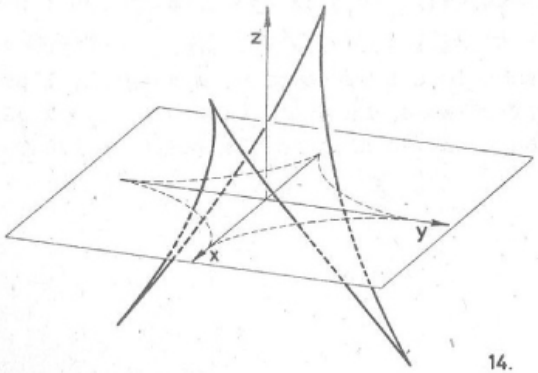


13.

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, at \cos t + \underline{j}\, at \sin t + \underline{k}\, bt.$$

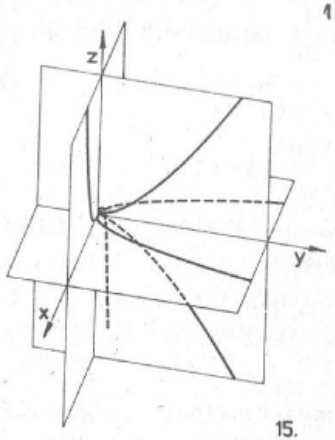
14. A görbe terszőleges pontja kielégíti az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ egyenletet.

15. A görbe tetszőleges pontjának az xy síkra eső merőleges vetülete illeszkedik az $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ egyenletrendszerű asztroidra és $-a \leq z \leq a$ is teljesül.

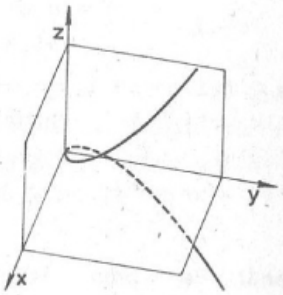


14.

16. $y = x^2$, $z = 0$;
$z = x^3$, $y = 0$;
$z^2 = y^3$, $x = 0$.



15.



17. A görbe érintővektora

$$\dot{\underline{r}}(t) = e^t \underline{i} - e^{-t} \underline{j} + 2t\underline{k},$$

az adott helyen

$$\dot{\underline{r}}(1) = e\underline{i} - \frac{1}{e}\underline{j} + 2\underline{k}.$$

Az érintő áthalad az

$$\underline{r}(1) = e\underline{i} + \frac{1}{e}\underline{j} + \underline{k}$$

helyvektorú ponton, egyenletrendszere tehát

$$\frac{x - e}{e} = 1 - ey = \frac{z - 1}{2}.$$

18. $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} z$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

19. A feltétel szerint a görbe érintővektora merőleges a sík normálvektorára, azaz $\dot{\underline{r}}(t) \cdot \underline{n} = 0$, ahol

$$\underline{n} = \underline{i} + 3\underline{j} + 2\underline{k}$$

a sík normálvektora. Ezért $t^3 + 3t^2 + 2t = 0$.
Innen $t_1 = -1$, $t_2 = -2$ ($t = 0$ esetén a derivált zérus vektor). A megfelelő érintőegyenesek egyenletrendszerei:

$$\frac{1}{4} - x = y + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - z, \quad \text{illetve}$$

$$\frac{x - 4}{-8} = \frac{y + \frac{8}{3}}{4} = \frac{z - 2}{-2}.$$

20. $P_1(-2,12,14)$, $P_2(-4,3,-4)$.

21. A csavarvonal tetszőleges t paraméterű pontjához tartozó érintő egyenletrendszere

$$X = a\cos t - a\tau \sin t$$
$$Y = a\sin t + a\tau \cos t$$
$$Z = bt + b\tau.$$

A $Z = 0$ feltételből $\tau = -t$ adódik, az érintőnek az xy síkkal alkotott M metszéspontjára tehát

$$X_0 = a\cos t + a\,t\sin t,$$
$$Y_0 = a\sin t - a\,t\cos t,$$
$$Z_0 = 0$$

teljesül. Ha a pont végigfut a csavarvonalon, a megfelelő M pontok körevolvenst irnak le (lásd a 3. feladatot!).

22. Az érintők az xy síkot az $y = \frac{3}{4}x^2$ parabola pontjaiban metszik.

23. $x^2 + y^2 = 2a^2$.

24. $x^2 + y^2 = 4a^2$.

25. A görbe tetszőleges pontja kielégiti a kúpfelület egyenletét. A görbe t paraméterű pontján áthaladó kúpalkotó irányvektora $\underline{r}(t)$, amelynek a pontbeli $\dot{\underline{r}}(t)$ érintővektorral alkotott γ szögére minden t paraméterértékre $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ teljesül.

26. Az érintővektor a görbe t paraméterű pontjában $\dot{\underline{r}}(t) = -\underline{i}\,R\sin 2t + \underline{j}\,R\cos 2t + \underline{k}\,R\cos t$, amelynek a z tengellyel párhuzamos hengeralkotóval bezárt szögére

$$\cos^2\gamma = \frac{\cos^2 t}{1 + \cos^2 t}$$

adódik. A γ szög abszolút értéke akkor a legkisebb, ha a $\frac{\cos^2 t}{1 + \cos^2 t}$ tört értéke a legnagyobb. Ez $\cos^2 t = 1$ esetén, azaz $t = 0$ és $t = \pi$ értékre teljesül. Mindkét esetben a $D(R,0,0)$ pont adódik, amelyen a Viviani-féle görbe kétszer

halad át (lásd a 12. ábrát).
A $t = 0$ értékre $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ adódik, ahonnan $\gamma = \pm\frac{\pi}{4}$,
a $t = \pi$ értékre pedig $\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, ahonnan $\gamma = \pm\frac{3\pi}{4}$.

27. A $t = x$ paraméter választással a két felület metszésvonalát $\underline{r}(t) = t\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$ vektor-skalár függvény irja le, ahol $y(t)$ és $z(t)$ a két felület egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása. Az érintővektor $\dot{\underline{r}}(t) = \underline{i} + \dot{y}(t)\underline{j} + \dot{z}(t)\underline{k}$. Az $\dot{y}(t)$ és $\dot{z}(t)$ differenciálhányadosok kiszámitásához deriváljuk mindkét egyenletet x szerint:

$$2x + 2y\dot{y} = 0$$
$$y + x\dot{y} - \dot{z} = 0.$$

Helyettesitsük be a P pont koordinátáit, ekkor a

$$4 + 4\dot{y} = 0$$
$$2 + 2\dot{y} - \dot{z} = 0$$

egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása $\dot{y} = -1$, $\dot{z} = 0$, tehát az érintővektor az adott P pontban $\dot{\underline{r}} = \underline{i} - \underline{j}$.

28. A $t = x$ paraméterválasztás esetén az egyenletek x szerinti deriválásával a

$$2z\dot{z} + 2 - 2y\dot{y} = 0$$
$$3 + \dot{y} - \dot{z} = 0$$

egyenletrendszert kapjuk, amelynek az adott pontban nincs megoldása, vagyis az $\underline{r}(t) = t\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$ vektor-skalár függvény az adott pontban nem deriválható.
Válasszuk most paraméternek a z változót és deriváljuk mindkét egyenletet z szerint. Ekkor a

$$2z + 2\dot{x} - 2y\dot{y} = 0$$
$$3\dot{x} + \dot{y} - 1 = 0$$

egyenletrendszert kapjuk, amelyből az adott pontban $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 1$ adódik. Mivel az $\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + t\underline{k}$ függvény deriváltja az $\dot{\underline{r}}(t) = \dot{x}(t)\underline{i} + \dot{y}(t)\underline{j} + \underline{k}$ vektor, a keresett érintővektor koordinátái $\dot{\underline{r}}(0,1,1)$.
Az érintőegyenes egyenletrendszere $x = 0$, $y = z$.

29. $\dot{\underline{r}}(t) = a\underline{i} + 2\sqrt{3ab}\ t\underline{j} + 6bt^2\underline{k}$

$|\dot{\underline{r}}(t)| = a + 6bt^2$

$$s = \int_0^1 (a + 6bt^2)dt = a + 2b.$$

30. $s = \sqrt{a^2 + b^2}\ t.$

31. $\underline{r}(s) = \underline{i}\, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \underline{j}\, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \underline{k}\, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (lásd az előző feladatot!).

32. $x = R \cos \frac{s}{R}$, $y = R \sin \frac{s}{R}$.

33. Azt kell megmutatni, hogy

$$|\underline{r}'(s)| = \left|\frac{d\underline{r}}{ds}\right| \equiv 1 \quad \text{teljesül.}$$

34. Lásd az előző feladatot!

35. A görbe tetszőleges pontjának a $t = 0$ paraméterű ponttól mért ívhossz-távolsága

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\underline{r}}(t)| = \int_0^t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \mathrm{sh}^2 t}\ dt =$$

$$= \int_0^t \mathrm{ch}\ t\ dt = \mathrm{sh}\ t.$$

Az $s(t) = \mathrm{sh}\, t$ függvény inverze $t(s) = \mathrm{arsh}\, s$. Ha végrehajtjuk ezt a paramétertranszformációt, a görbének az

$$\underline{r}(s) = \underline{i} \cos(\mathrm{arsh}\ s) + \underline{j} \sin(\mathrm{arsh}\ s) + \underline{k}\sqrt{1 + s^2}$$

egyenletére jutunk.

36. $R^2 = 2as.$

37. Az érintő irányába mutató egységvektor

$$\underline{t} = -\frac{6}{11}\underline{i} + \frac{2}{11}\underline{j} + \frac{9}{11}\underline{k},$$

a főnormális $\underline{n} = -\frac{7}{11}\underline{i} + \frac{6}{11}\underline{j} - \frac{6}{11}\underline{k}$,

a binormális $\underline{b} = -\frac{6}{11}\underline{i} - \frac{9}{11}\underline{j} - \frac{2}{11}\underline{k}$.

A kisérő triéder síkjai áthaladnak az $\underline{r}(-1) = 3\underline{i} + \underline{j} - 3\underline{k}$ helyvektorú ponton.

A simulósík egyenlete $6x + 9y + 2z - 21 = 0$, rektifikáló síké $7x - 6y + 6z + 3 = 0$, a normálsiké pedig $6x - 2y - 9z - 43 = 0$.

38. $\underline{t} = \frac{\underline{j} + \underline{k}}{\sqrt{2}}$, $\underline{n} = \frac{2\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}}{\sqrt{6}}$, $\underline{b} = \frac{\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}}{\sqrt{3}}$.

39. $x - z = 0.$

40. A simulósík $x - 3z + 2 = 0$, a rektifikáló sík $3x - 10y + z + \frac{68}{3} = 0$, a normálsík $3x + y + z + \frac{2}{3} = 0.$

41. Az érintő $x = t$, $y = 0$, $z = 1 + t$, a binormális $\frac{x}{-2} = -y = \frac{z - 1}{2}$, a főnormális $-x = \frac{y}{4} = z - 1.$

42. $A(1, \ln 2, -4).$

43. $\dot{\underline{r}}(t) = -\sin 2t\ \underline{i} + \cos 2t\ \underline{j} - \sin t\ \underline{k}$

$\ddot{\underline{r}}(t) = -2\cos 2t\ \underline{i} - 2\sin 2t\ \underline{j} - \cos t\ \underline{k}$

$\dot{\underline{r}}(0) = \underline{j}$

$\ddot{\underline{r}}(0) = -2\underline{i} - \underline{k}.$

A simulósík Hesse-féle normálegyenlete:

$$-\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2z}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.$$

Az origó és a simulósík távolsága $|d| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

44. $\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a \sin t\ \underline{i} + a \cos t\ \underline{j} + b\underline{k})$,

$\underline{n} = -\cos t\ \underline{i} - \sin t\ \underline{j}$,

$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b \sin t\ \underline{i} - b \cos t\ \underline{j} + a\ \underline{k})$.

A csavarvonal tengelyének irányvektora a $\underline{k}$ vektor.

$\cos(\underline{t},\underline{k}) \sphericalangle = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos(\underline{n},\underline{k}) \sphericalangle = 0$, $\cos(\underline{b},\underline{k}) \sphericalangle = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

45. $\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{3}} [\underline{i}(\cos t - \sin t) + \underline{j}(\sin t + \cos t) + \underline{k}]$,

$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\underline{i}(\sin t + \cos t) + \underline{j}(\cos t - \sin t)]$,

$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{6}} [\underline{i}(\sin t - \cos t) - \underline{j}(\sin t + \cos t) + 2\underline{k}]$.

$\cos(\underline{t},\underline{k}) \sphericalangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos(\underline{n},\underline{k}) \sphericalangle = 0$, $\cos(\underline{b},\underline{k}) \sphericalangle = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

46. Ha a görbe binormálisa állandó, akkor simulósikja a görbe minden pontjában ugyanaz, tehát a görbe sikgörbe. A görbe sikjának normálvektora $\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = -6\underline{i} - 4\underline{j} - 6\underline{k}$, egy pontja például az $\underline{r}(0) = -5\underline{j} - 2\underline{k}$ helyvektorú pont, az egyenlete tehát $3x + 2y + 3z + 16 = 0$.

47. A feladat megoldását úgy is elvégezhetjük, mint a 46. feladatét. Most más megoldást mutatunk. Válasszuk ki a görbe három tetszőleges pontját és irjuk fel a három pont által meghatározott sik egyenletét ($x - 4y - 2z + 3 = 0$). Ezután mutassuk meg, hogy a görbe tetszőleges t paraméterértékhez tartozó pontja kielégiti ennek a siknak az egyenletét.

Megjegyzés: Egy görbéről úgy is beláthatjuk, hogy sikgörbe, hogy kiszámitjuk a torzióját a t paraméterü tetszőleges pontjában. Ha az eredmény zérus, a görbe sikgörbe.

48. Irjuk fel a görbe t paraméterü pontjában a normálsik egyenletét (az érintővektort lásd a 26. feladat megoldásában) és igazoljuk, hogy az $O(0,0,0)$ pont kielégiti ezt az egyenletet.

49. A főnormális egységvektor

$$\underline{n} = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Ha a felmért szakaszok hossza λ, akkor a végpontok a

$$\underline{\varrho}(t) = (a - \lambda)\cos t\, \underline{i} + (a - \lambda)\sin t\, \underline{j} + bt\underline{k}$$

vektor-skalár függvény által leirt hengeres csavarvonalon helyezkednek el.

50. $\underline{t} = \underline{i}$, $\underline{n} = \underline{j}$, $\underline{b} = \underline{k}$.

A vetületek egyenletét lásd a 16. feladat megoldásánál!

51. $4x - y + z - 9 = 0$.

52. A főnormális egyenletrendszere $\frac{x-1}{31} = \frac{y-1}{26} = \frac{z-1}{-22}$, a binormálisé $\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1}$.

53. $\dot{\underline{r}}(t) = 2t\underline{i} + \underline{j} + (3t^2 - 1)\underline{k}$

$\ddot{\underline{r}}(t) = 2\underline{i} + 6t\underline{k}$

$\dddot{\underline{r}}(t) = 6\underline{k}$

$\dot{\underline{r}}(1) = (2,1,2)$

$\ddot{\underline{r}}(1) = (2,0,6)$

$\dddot{\underline{r}}(1) = (0,0,6)$

$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} = (6,-8,-2)$

$G = \frac{2\sqrt{26}}{27}$, $T = \frac{-3}{26}$.

54. $G = \frac{2}{9}$, $T = \frac{-2}{9}$.

55. $G = -T = \frac{1}{2}$.

56. $G = \frac{2}{a^2 + 1}$, $T = \frac{3a}{2(a^2 + 1)}$.

57. $G = \frac{1}{2}$, $T = -\frac{3}{8}$.

58. Utmutatás: Állitsuk elő a görbét a $t = x$ paraméter választással az $\underline{r}(t) = t\underline{i} + y(t)\underline{j}$ vektor-skalár függvénnyel

és helyettesitsünk a $G = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^3}$ képletbe.

59. $G = \frac{1}{p}$.

60. Az ellipszis paraméteres vektoregyenlete

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, a \cos t + \underline{j}\, b \sin t.$$

A görbület a nagytengely végpontjában $G(0) = \frac{b}{a^2}$, a kistengely végpontjában pedig $G(\frac{\pi}{2}) = \frac{a}{b^2}$, amiből az ábrán látható szerkesztési eljárás közvetlenül adódik.

61. $G = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $T = \frac{b}{a^2 + b^2}$.

62. $G = T = \frac{1}{3(t^2 + 1)^2}$.

63. A keresett pontok a $t = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ paraméterértékeknek felelnek meg. (A görbét lásd a 14. ábrán).

64. A keresett pontok a $t = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ paraméterértékeknek felelnek meg.

65. A görbület a görbe futópontjában

$$G(t) = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{5 + 3\cos^2 t}{(1 + \cos^2 t)^3}}.$$

Mivel a $G^2(t)$ függvénynek ugyanott van lokális szélsőértéke, mint a $G(t)$ függvénynek, a

$$\frac{dG^2(t)}{dt}$$

differenciálhányadost készitjük el, amelynek számlálójában $3(1 + \cos^2 t)^2(4 + 2\cos^2 t)\sin 2t$ áll, a nevezője pedig mindig pozitiv.

A $\frac{dG^2(t)}{dt}$ zérushelyei $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ $(0 \le t < 2\pi)$ és ezeken a helyeken előjelet is vált. A görbületnek tehát a $D(R,0,0)$ pontban lokális minimuma, a $(0, 0 \pm R)$ pontokban pedig lokális maximuma van.

66. Az adott pontban a főnormális egységvektor

$\underline{n} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4\underline{i} + \underline{j} + \underline{k})$, a görbület $G = \frac{2\sqrt{2}}{9}$.

A görbületi középpont helyvektora

$$\underline{\varrho} = \underline{r}(1) + \frac{1}{G}\underline{n} = \underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k} + \frac{9}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}}(4\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}) =$$

$$= 4\underline{i} + \frac{7}{4}\underline{j} + \frac{15}{4}\underline{k}.$$

67. Használjuk fel a 39. feladat megoldását

$$\lambda = \frac{1}{G} = \frac{a^2 + b^2}{a}$$

helyettesitéssel (lásd az 57. feladatot!).

68. A főnormális egységvektor a görbe futópontjában

$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\underline{i}(\cos t + \sin t) + \underline{j}(\cos t - \sin t)]$,

a görbület $G = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}$, tehát a görbületi középpontok a

$$\underline{\varrho}(t) = -e^t\left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\sin t\right)\underline{i} + e^t\left(\frac{3}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t\right)\underline{j} +$$

$$+ e^t\underline{k}$$

egyenletü görbén helyezkednek el.

69. A főnormális egységvektor

$$\underline{n} = \frac{1}{(e^t + e^{-t})^2}\left[\sqrt{2}(e^t + e^{-t})\underline{i} + \sqrt{2}(e^t + e^{-t})\underline{j} + \right.$$

$$\left. + (e^{-2t} - e^{2t})\underline{k}\right],$$

a görbület

$$G = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

A görbületi középpontok helyvektora tehát

$$\underline{\varrho}(t) = (2e^t + e^{-t})\underline{i} + (e^t + 2e^{-t})\underline{j} + \sqrt{2}\left(t - \frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{2}\right)\underline{k}.$$

70. A cikloist előállitó függvény

$$\underline{r}(t) = \underline{i}\, a(t - \sin t) + \underline{j}\, a(1 - \cos t).$$

A t paraméterü pontban a görbület

$G = \frac{1}{a\,2\sqrt{2(1-\cos t)}}$, a főnormális

$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos t)}}(\underline{i}\sin t - \underline{j}(1-\cos t))$.

A görbületi középpontok által alkotott görbét tehát a

$\varrho(t) = \underline{r}(t) + \frac{1}{G}\underline{n}(t) = \underline{i}\,a\,(t+\sin t) + \underline{j}\,a\,(-1+\cos t)$

állitja elő, amelyből $\tau = t - \pi$ helyettesitéssel

$\varrho(t) = \underline{r}(t) + a\pi\,\underline{i} - 2a\underline{j}$ adódik, vagyis az eredetiből eltolással keletkező ciklois.

71. Válasszuk paraméternek az x változót és deriváljuk x szerint mindkét egyenletet.
Az első deriválás után a $2x - 6y\dot{y} - \dot{z} = 0$
$1 + \dot{y} + \dot{z} = 0$,
a második deriválás után a $2 - 6\dot{y}^2 - 6y\ddot{y} - \ddot{z} = 0$
$\ddot{y} + \ddot{z} = 0$
egyenletrendszert kapjuk.
Az adott pontban az első egyenletrendszer megoldása
$\dot{y} = 1$, $\dot{z} = -2$, a másodiké pedig $\ddot{y} = -\frac{4}{5}$, $\ddot{z} = \frac{4}{5}$.

Tehát a derivált vektorok koordinátái $\dot{\underline{r}}(1,1,-2)$ és
$\ddot{\underline{r}}(0,-\frac{4}{5},\frac{4}{5})$.

Innen a görbületre a $G = \frac{\sqrt{2}}{15}$ értéket kapjuk.

72. $G = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $T = 1$.

73. A görbe tetszőleges pontjában $G = T = \frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$.

A futópontnak a t = 0 paraméterü ponttól mért ivhossz-távolsága

$$s = \int_0^t |\dot{\underline{r}}|\,dt = \int_0^t \sqrt{2}a\,\mathrm{ch}\,t\,dt = \sqrt{2}a\,\mathrm{sh}\,t.$$

Az $s(t) = \sqrt{2}a\,\mathrm{sh}\,t$ függvény inverze $t = \mathrm{arsh}\frac{s}{a\sqrt{2}}$.

Ezt a paramétertranszformációt végrehajtva

$$G = T = \frac{a}{2a^2 + s^2}$$

adódik.

74. Helyettesitsük be a Frenet-formulákba az adott pontban kiszámitott

$$\underline{t} = \underline{i},\quad \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{k},\quad \underline{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{k}$$

vektorokat és a $G = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $T = 0$ értékeket.

Igy $\underline{t}' = \frac{1}{4}\underline{j} - \frac{1}{4}\underline{k}$, $\underline{n}' = -\frac{\sqrt{2}}{4}\underline{i}$ és $\underline{b}' = \underline{o}$ adódik.

75. $\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$

$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$

$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

$G = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $T = \frac{1}{3}$

$\underline{t}' = (-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6})$

$\underline{n}' = \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$

$\underline{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3})$.

76. A Darboux-féle vektor $\underline{d} = T\underline{t} + G\underline{b}$.
Mivel az adott pontban $\underline{t} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{26}}(3,-4,-1)$,
$G = \frac{2\sqrt{26}}{27}$ és $T = -\frac{3}{26}$, $\underline{d} = (\frac{2}{9} - \frac{1}{13})\underline{i} - (\frac{8}{27} + \frac{1}{26})\underline{j} - (\frac{2}{27} + \frac{1}{13})\underline{k}$.

Megjegyzés: A Darboux-féle vektor a görbén egységnyi sebességgel mozgó ponthoz tartozó kisérő triéder pillanatnyi szögsebességvektora és segitségével a Frenet-féle képletek a következő képpen irhatók:

$$\underline{t}' = \underline{d} \times \underline{t}, \quad \underline{n}' = \underline{d} \times \underline{n}, \quad \underline{b}' = \underline{d} \times \underline{b}.$$

77. A Frenet-képletek felhasználásával

$$\underline{r}''' = (G\underline{n})' = G'\underline{n} + G\underline{n}' = G'\underline{n} - G^2\underline{t} + GT\underline{b}.$$

Ha ezt a vektort skalárisan megszorozzuk az $\underline{r}' = \underline{t}$ vektorral, az első állitást kapjuk.

Mivel $\underline{t}\underline{b}\underline{b}' = -T\underline{t}\underline{b}\underline{n}$ és $\underline{t}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$ jobbrendszert alkotnak, $\underline{t}\underline{b}\underline{n} = -1$.

Az $\underline{r}'''$ vektornak és az $\underline{r}'' = \underline{t}' = G\underline{n}$ vektornak a skaláris szorzata valóban $G \cdot G'$.

78. A sik tetszőleges pontjának helyvektora

$$\underline{r}(u,v) = \vec{OA} + u \cdot \vec{AC} + v \cdot \vec{AB}$$

alakban állitható elő. Az adatok behelyettesitésével

$$\underline{r}(u,v) = 2\underline{i} + 3\underline{j} + 5\underline{k} + u(-\underline{i} - 3\underline{k}) + v(2\underline{i} + 2\underline{j} - 11\underline{k})$$

adódik, rendezés után az

$$\underline{r}(u,v) = (2 - u + 2v)\underline{i} + (3 - 2v)\underline{j} + (5 - 3u - 11v)\underline{k}$$

egyenletet kapjuk.

79. A hengerfelület futó pontjának helyvektora $\underline{r}(u,v) = \underline{r}_1(u) + v\underline{a}$ alakban állitható elő, ahol $\underline{r}_1(u)$ a vezérgörbe egyenlete (itt asztroid), $\underline{a}$ pedig az alkotó irányvektora. Eszerint az adott hengerfelület vektoregyenlete a következő:

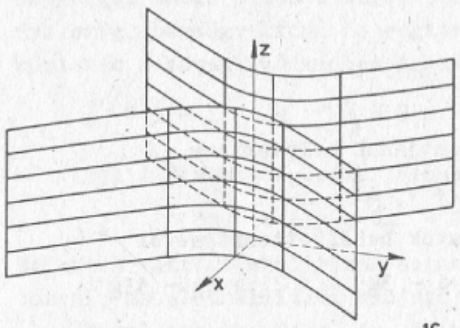
$$\underline{r}(u,v) = 4\cos^3 u\underline{i} + 4\sin^3 u\underline{j} + v(3\underline{i} + 2\underline{j} + 4\underline{k}), \text{ vagyis}$$

$$\underline{r}(u,v) = (4\cos^3 u + 3v)\underline{i} + (4\sin^3 u + 2v)\underline{j} + 4v\underline{k}.$$

Ha az $x = 4\cos^3 u + 3v$,
$y = 4\sin^3 u + 2v$,
$z = 2v$

egyenletrendszerből kiküszöböljük az u és v paramétereket, a felület $(2x - 3z)^{2/3} + (2y - 2z)^{2/3} = 4$ alakú implicit egyenletét kapjuk.

$-2 \le u \le 2$ $0 \le v \le 3$



16.

80. Az adott hiperbola paraméteres vektoregyenlete

$\underline{r}_1(u) = \underline{i}\,\mathrm{ch}\,u + \underline{j}\,\mathrm{sh}\,u.$

A hengerfelület vektoregyenlete

$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\,\mathrm{ch}\,u + \underline{j}\,\mathrm{sh}\,u + \underline{k}v,$

illetve

$x^2 - y^2 = 1.$

81. Az adott vezérgörbe ellipszis. A keresett egyenletek

$$\underline{r}(u,v) = v\underline{i} + 2\cos u\,\underline{j} + 3\sin u\,\underline{k}$$

és

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

82. Ha $\underline{r}(u)$ a vezérgörbét leíró függvény, $\underline{c}$ pedig a csúcs helyvektora, akkor a kúpfelület tetszőleges pontjába mutató vektor

$$\underline{r}(u,v) = \underline{c} + v(\underline{r}(u) - \underline{c}).$$

Az adatok behelyettesítésével

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}v\cos u + \underline{j}v\sin u + \underline{k}(1 - v)$$

adódik. $0 \le v \le 1$ értékeire a kúpfelületnek az adott egységkör és a csúcs közé eső darabját kapjuk.
Az implicit egyenlet $x^2 + y^2 = (1 - z)^2$.

Megjegyzés: A kúpfelület vektoregyenlete az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v(\underline{c} - \underline{r}(u))$$

alakban is előállítható.

83. A vezérgörbe kör, amelynek paraméteres vektoregyenlete $\underline{r}(u) = 2\cos u\,\underline{i} + (2 + 2\sin u)\,\underline{j}$.
A keresett egyenletek

$$\underline{r}(u,v) = (2 + 2v\cos u - 2v)\underline{i} + (5 + 2v\sin u - 3v)\underline{j} + (3 - 3v)\underline{k},$$

illetve

$$(3x - 2z)^2 + 9(y - 2 - z)^2 - 4(3 - z)^2 = 0.$$

84. Az adott parabola előállítható pl. az

$$\underline{r}(u) = u\underline{i} - \underline{j} + u^2\underline{k}$$

vektoregyenlettel.
A kúpfelület egyenletei

$$\underline{r}(u,v) = (2 + uv - 2v)\underline{i} + (3 - 4v)\underline{j} + (-4 + u^2v + 4v)\underline{k},$$

illetve

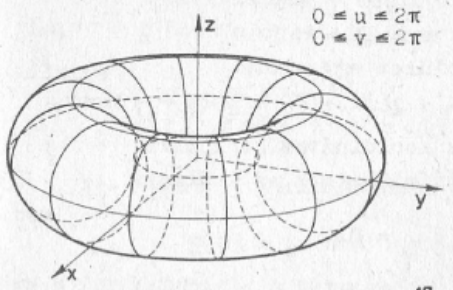
$$(2x - y - 1)^2 + (3 - y)^2 - (z + 4)(3 - y) = 0.$$

85. A vezérgörbe körevolvens.

$$\underline{r}(u,v) = 2v(\sin u - u\cos u)\underline{i} + 8(v - 1)\underline{j} + 2v(\cos u + u\sin u)\underline{k}.$$

86. A vezérgörbe a Viviani görbe (lásd a 12. ábrát).

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\,R\,v\cos^2 u + \underline{j}\,R\,v\cos u\sin u + \underline{k}\,R\,v\sin u.$$



17.

87. A meridiángörbe paraméteres vektoregyenlete

$\underline{r}(u) = (a + b\cos u)\underline{i} + b\sin u\,\underline{k}.$

Forgassuk a kört a z tengely körül po-

zitiv irányban és válasszuk v paraméternek a meridiángörbe síkjának az xz koordinátasiktól való elfordulásának szögét. Ekkor a keletkező tórusz vektoregyenlete

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}(a + b\cos u)\cos v + \underline{j}(a + b\cos u)\sin v + \underline{k}\, b \sin u \quad (0 \le u < 2\pi\,,\ 0 \le v < 2\pi\,).$$

88. A megforgatott kör vektoregyenlete

$$\underline{r}(u) = \underline{i}\, R\cos u + \underline{k}\, R \sin u.$$

Ha v a pozitiv irányban elforgatott kör síkjának az xz koordinátasikkal bezárt szöge, akkor

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\, R\cos u + \underline{j}\, R \sin u \sin v + \underline{k}\, R \sin u \cos v$$

$(0 \le u < 2\pi\,,\ 0 \le v < 2\pi\,)$.

A paraméterek kiküszöbölésével a gömb ismert

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

egyenletét kapjuk.

89. A meridiángörbe az

$$\underline{r}(u) = (3 + 2\cos u)\underline{i} + 2\sin u\, \underline{j}$$

egyenletü kör. A keletkező tórusz egyenlete

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}(3 + 2\cos u)\cos v + \underline{j}\, 2\sin u + \underline{k}(3 + 2\cos u)\sin v$$

$(0 \le u < 2\pi\,,\ 0 \le v < 2\pi\,)$,

illetve

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 13)^2 + 36y^2 - 144 = 0.$$

90. Az adott egyenes paraméteres egyenletrendszere pl.

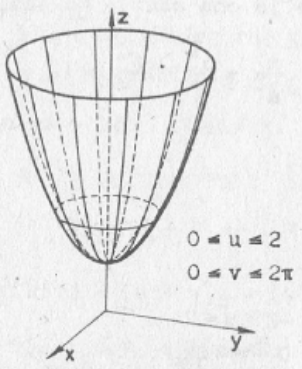
$$x = 0, \quad y = 3t + 2, \quad z = 2t - 1$$

A forgatással keletkező kúpfelület egyenlete

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}(2u - 1)\sin v + \underline{j}(3u + 2) + \underline{k}(2u - 1)\cos v,$$

ahol v a meridiánsiknak az yz koordinátasiktól mért elfordulási szöge. Ennek a kúpfelületnek az implicit egyenlete

$$9x^2 + 9z^2 - (2y - 7)^2 = 0.$$



18.

91. Az adott parabolát a tengelye körül forgatjuk meg, igy forgásparaboloid keletkezik, amelynek egyenlete

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\, u\cos v + \underline{j}\, u \sin v + \underline{k}(u^2 + 1),$$

ahol v az elforgatott meridiángörbe síkjának az xz sikkal bezárt szöge. A felület implicit egyenlete

$$x^2 + y^2 = z - 1,$$

amelyhez közvetlenül is eljuthatunk. Legyen a forgásparaboloid tetszőleges pontja $P(X,Y,Z)$, amely az adott parabola $P'(0,y,z)$ pontjának a z tengely körüli elforgatásával keletkezik. A koordináták között a következő összefüggések irhatók fel:

$$X^2 + Y^2 = y^2, \quad Z = z.$$

Mivel $z = y^2 + 1$ teljesül, ezért a felület futó pontjának koordinátái az $X^2 + Y^2 = Z - 1$ egyenletet elégitik ki, amely éppen a felület fent felirt egyenlete.

92. A meridiángörbe kör, a keletkező tórusz egyenlete

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}(3 + 2\cos u)\cos v + \underline{j}(4 + 2\sin u) + \underline{k}(3 + 2\cos u)\sin v.$$

93. A meridiángörbe asztroid, a felület egyenlete

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\, 5\cos^3 u \cos v + \underline{j}\, 5\cos^3 u \sin v + \underline{k}\, 5 \sin^3 u,$$

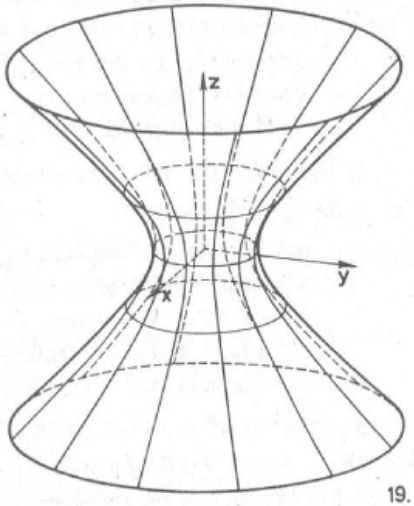
illetve

$$\left[\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2\right]^{1/3} + \left(\frac{z}{5}\right)^{2/3} = 1.$$

94. Legyen a meridiángörbe az xz koordinátasikban

$$\underline{r}(u) = \underline{i}\, a \operatorname{ch} u + \underline{k}\, c \operatorname{sh} u$$

és a forgástengely a z tengely.
A keletkező felület egyköpenyü forgáshiperboloid.



19.

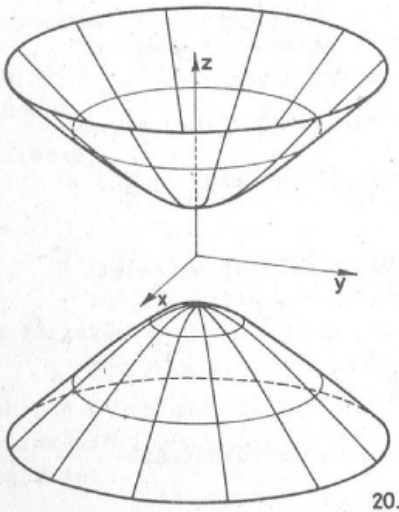
$\underline{r}(u,v) = \underline{i}a \operatorname{ch} u \cos v +$

$+ \underline{j}a \operatorname{ch} u \sin v + \underline{k}c \operatorname{sh} u,$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$-2 \le u \le 2$

$0 \le v \le 2\pi$



20.

95. Legyen a meridiángörbe az xz koordinátasikban $\underline{r}(u) = \underline{i}a \operatorname{sh} u +$ $+ \underline{k}c \operatorname{ch} u$ és a forgástengely a z tengely. A keletkező felület kétköpenyü forgáshiperboloid.

$\underline{r}(u,v) = \underline{i}a \operatorname{sh} u \cos v +$

$+ \underline{j}a \operatorname{sh} u \sin v + \underline{k}c \operatorname{ch} u,$

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

$-2 \le u \le 2{,}4$

$0 \le v \le 2\pi$

96. $\underline{r}(u,v) = \underline{i} \sin u \cos v + \underline{j}u + \underline{k} \sin u \sin v.$

97. A meridiángörbe kardioid (lásd a 6. ábrát).

$\underline{r}(u,v) = (2\cos u - \cos 2u)\underline{i} + (2\sin u - \sin 2u)\cos v\, \underline{j} +$

$+ (2\sin u - \sin 2u)\sin v\, \underline{k}.$

98. A felület futó pontjának helyvektora

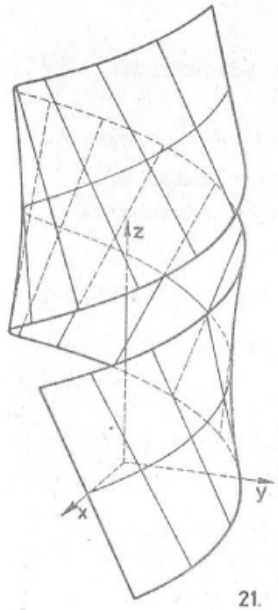
$$\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v \cdot \dot{\underline{r}}(u).$$

Igy

$$\underline{r}(u,v) = (u + v)\underline{i} + (u^2 + 2uv)\underline{j} + (u^3 + 3u^2 v)\underline{k}.$$

99. $\underline{r}(u,v) = R(\cos^2 u - v \sin 2u)\underline{i} + R(\sin u \cos u +$

$+ v \cos 2u)\underline{j} + R(\sin u + v \cos u)\underline{k}.$



21.

$0 \le u \le 2{,}5\pi$

$-1 \le v \le 1$

100. $\underline{r}(u,v) = (a \cos u + vb \sin u)\underline{i} +$

$+ (a \sin u - vb \cos u)\underline{j} + (bu +$

$+ av)\underline{k}.$

Megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az

$$\dot{\underline{r}}\underline{l}\dot{\underline{l}} = 0$$

feltétel, ahol

$\underline{r}(u) = \underline{i}a \cos u + \underline{j}a \sin u +$

$+ \underline{k}bu,$

$\underline{l}(u) = \underline{i}b \sin u - \underline{j}b \cos u +$

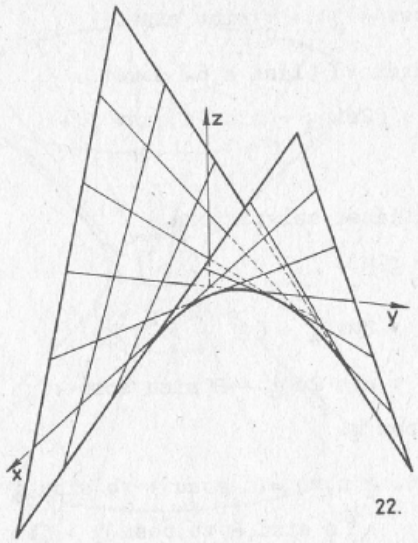
$+ \underline{k}a.$

Mivel $\dot{\underline{r}}\underline{l}\dot{\underline{l}} = b^3 + a^2 b \neq 0,$ ha $\underline{b} \neq 0$, a felület nem lefejthető.

A $b = 0$ esetben a csavarvonal körré fajul el, a szóbanforgó felület hengerfelület, amely lefejthető.

101. A paramétervonalak egyenesek, a felület hiperbolikus paraboloid (nyeregfelület)

$$z = xy.$$



22.

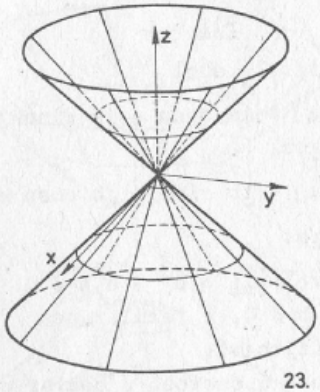
$-3 \le u < 3$

$-3 \le v \le 3$

102. A felület másodrendű kúp

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

a paramétervonalak körök, illetve egyenesek.

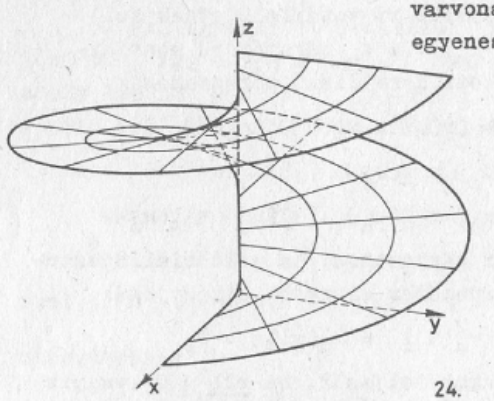


23.

$0 \le u \le 2\pi$

$-3 \le v \le 3$

103. A felület zárt, laposmenetü csavarfelület, a paramétervonalak csavarvonalak, illetve egyenesek.



24.

$0 \le u \le 2\pi + \pi/3$

$0 \le v \le 4{,}51$

104. A felület ferde körhenger, melynek alkotóiránya $\underline{a}(1,1,1)$. A paramétervonalak egyenesek, illetve körök.

105. A felület egyköpenyü hiperboloid,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

A paramétervonalak hiperbolák, illetve ellipszisek.

106. A felület forgásparaboloid,

$$z = x^2 + y^2.$$

A paramétervonalak parabolák, illetve körök.

107. Az $\underline{r}(u)$ görbe érintői által alkotott felület az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v\dot{\underline{r}}(u)$$

vektorfüggvénnyel állitható elő, amelyre nyilvánvalóan teljesül, hogy $\dot{\underline{r}}\dot{\underline{l}}\underline{l} = 0$, ahol $\underline{l}(u) \equiv \dot{\underline{r}}(u)$.

108. Egy alkotó különböző pontjaihoz tartozó érintősikok akkor esnek egybe, ha a felületi normálisok párhuzamosak az alkotó mentén. Felirjuk, hogy az

$$\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v\underline{l}(u)$$

vektoregyenlettel előállított vonalfelületnek az $u = u_0$, $v = 0$ és $u = u_0$, $v = v_0$ paraméterű pontjaiban kiszámított felületi normálisai párhuzamosak.

$$\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v = (\dot{\underline{r}}(u) + v\dot{\underline{l}}(u)) \times \underline{l}(u)$$

$$\underline{m}(u_0,0) = \dot{\underline{r}}(u_0) \times \underline{l}(u_0)$$

$$\underline{m}(u_0,v) = \dot{\underline{r}}(u_0) \times \underline{l}(u_0) + v\dot{\underline{l}}(u_0) \times \underline{l}(u_0).$$

Ez a két vektor akkor párhuzamos, ha vektoriális szorzatuk zérus (az u_0 paraméter kiírását elhagyjuk):

$$(\dot{\underline{r}} \times \underline{l}) \times (\dot{\underline{r}} \times \underline{l} + v\dot{\underline{l}} \times \underline{l}) = v\underline{l}(\dot{\underline{r}}\dot{\underline{l}}\underline{l}) = 0,$$

ami pedig pontosan akkor teljesül, ha $\dot{\underline{r}}\dot{\underline{l}}\underline{l} = 0$, vagyis a felület lefejthető.

1. Megjegyzés: A vonalfelület lefejthetősége definiálható a feladatban megfogalmazott feltétellel.

2. Megjegyzés: A vonalfelület pontosan akkor lefejthető, ha bármely pontjában a szorzatgörbület zérus.
Ezért használatos a következő definició: Az olyan felületeket, amelyeken mindenütt $K = 0$, lefejthető felületnek nevezzük.

109. A vonalfelületet előállító $\underline{r}(u,v) = \underline{r}(u) + v\underline{l}(u)$ függvényben az első paraméter legyen a vezérgörbe természetes paramétere ($u = s$) és $\underline{l}(u)$ az alkotóirányú egységvektor. A lefejthetőség feltétele $\underline{r}'\underline{l}'\underline{l} = 0$, vagyis a három vektor lineárisan függő az s tetszőleges értékére, azaz

$$(*) \quad \alpha(s)\underline{r}'(s) + \beta(s)\underline{l}'(s) + \gamma(s)\underline{l}(s) = 0.$$

A továbbiakban felhasználjuk, hogy $\underline{l}^2(s) \equiv 1$ deriválásával $\underline{l}' \cdot \underline{l} = 0$, vagyis $\underline{l}' \perp \underline{l}$ adódik.

1. eset Legyen $\alpha(s) \equiv 0$.

A $(*)$ egyenletet skalárisan megszorozzuk $\underline{l}(s)$-sel, igy a $\gamma(s)\underline{l}^2(s) = 0$ összefüggést kapjuk, amely szerint $\gamma(s) \equiv 0$. $(*)$-ból $\underline{l}'(s) = 0$ adódik, vagyis $\underline{l}(s)$ állandó, a vonalfelület tehát henger.

2. eset Legyen $\alpha(s) \neq 0$.

Ekkor $(*)$-ból $\underline{r}'(s)$ kifejezhető:

$$\underline{r}'(s) = \lambda(s)\underline{l}'(s) + \mu(s)\underline{l}(s),$$

ahol $\lambda(s) = -\frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$ és $\mu(s) = -\frac{\gamma(s)}{\alpha(s)}$.

Átrendezéssel

$$\underline{r}'(s) - \lambda(s)\underline{l}'(s) = \mu(s)\underline{l}(s).$$

Vonjuk ki mindkét oldalból a $\lambda'(s)\underline{l}(s)$ szorzatot, igy

$$\frac{d}{ds}(\underline{r}(s) - \lambda(s)\underline{l}(s)) = (\mu(s) - \lambda'(s))\underline{l}(s)$$

irható. Most két eset lehetséges: vagy $\mu(s) - \lambda'(s) = 0$ és ekkor $\underline{r}(s) - \lambda(s)\underline{l}(s) = \underline{c}$ állandó. A vonalfelület egyenletét $\underline{r}(s,v) = \underline{r}(s) + v\underline{l}(s) = \underline{c} + (v + \lambda(s))\underline{l}(s)$ alakba irva kúpfelületet kaptunk.
Ha $\mu(s) - \lambda'(s) \neq 0$, akkor a $\frac{d}{ds}(\underline{r}(s) - \lambda(s)\underline{l}(s))$ vektor és az $\underline{l}(s)$ vektor párhuzamosak. Ebben az esetben a lefejthető vonalfelület egyenlete $\underline{r}(s,v) = \underline{a}^{*}(s) + \sigma(s,v)(\underline{a}^{*}(s))'$ alakban irható, tehát a vonalfelület az $\underline{a}^{*}(s) = \underline{r}(s) - \lambda(s)\underline{l}(s)$ görbe érintőegyeneseiből álló felület.
Az $\underline{a}^{*}(s)$ görbét a felület oromvonalának vagy gerincvonalának nevezik.

110. Az adott ponton áthaladó paramétervonalak vektoregyenletei:

$$\underline{r}(u,\tfrac{\pi}{3}) = u\underline{i} + \tfrac{1}{2}(1+u)\underline{j} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}(1+u)\underline{k} \quad \text{(egyenes)}$$

és $\underline{r}(1,v) = \underline{i} + \underline{j}\,2\cos v + \underline{k}\,2\sin v$ (kör).

A paramétervonalak érintővektorai az

$$\underline{r}_u = \underline{i} + \underline{j}\cos v + \underline{k}\sin v \quad \text{és az}$$

$$\underline{r}_v = -\underline{j}(1+u)\sin v + \underline{k}(1+u)\cos v$$

derivált vektorok. Az adott pontban

$$\underline{r}_u = (1,\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}), \quad \underline{r}_v = (0,-\sqrt{3},1)$$

és mivel $\underline{r}_u\underline{r}_v = 0$, az általuk bezárt szög 90°.

111. $\varphi = 90^\circ$.

112. Először meghatározzuk az adott ponthoz tartozó paraméterértékeket. A

$$2u - v = 3$$

$$u^2 + v^2 = 5$$

egyenletrendszer megoldásai $(u = 2,\ v = 1)$ és $(u = \tfrac{2}{5},\ v = -\tfrac{11}{5})$, ezek közül azonban csak az első elégiti ki az $u^3 - v^3 = 7$ egyenletet.
Az $\underline{r}_u$, $\underline{r}_v$ derivált vektorokat tehát az $u = 2$, $v = 1$ paraméterü helyen számitjuk ki: $\underline{r}_u = (2,4,12)$, $\underline{r}_v = (-1,2,-3)$. Az u-paramétervonal érintőegyenesének egyenletrendszere

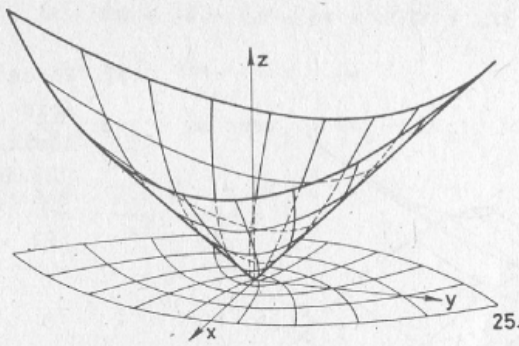
$$x - 3 = \frac{y-5}{2} = \frac{z-7}{6},$$ a v-paramétervonalé pedig $$3 - x = \frac{y-5}{2} = \frac{7-z}{3}.$$

113. A felület adott pontjának helyvektora

$$\underline{r}(1,2) = -3\underline{i} + 4\underline{j} + 5\underline{k}.$$

$$\underline{r}_u = 2u\underline{i} + 2v\underline{j} + 2u\underline{k},$$

(A 25. ábrán a felület egy darabja az xy-sikra eső merőleges vetületével együtt látható.)



25.

$-2{,}25 \le u \le 2{,}25$

$$\underline{r}_v = -2v\underline{i} + 2u\underline{j} + 2v\underline{k},$$

$-2{,}25 \le v \le 2{,}25$

$$\underline{r}_u(1,2) = (2,4,2),$$

$$\underline{r}_v(1,2) = (-4,2,4).$$

A felületi normális $\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v = 12\underline{i} - 16\underline{j} + 20\underline{k}$.
A normális egyenes egyenletrendszerét az $\frac{1}{4}\underline{m}$ irányvektorral irjuk fel:

$$\frac{x+3}{3} = \frac{4-y}{4} = \frac{z-5}{5}.$$

114. Az adott paraméterértékekhez tartozó felületi pont P(−7,4,−3). Az érintősik normálvektora

$\underline{m} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v$ felületi normális.

$$\underline{r}_u = 3u^2\underline{i} + v^2\underline{j} + (2uv - 1)\underline{k},$$

$$\underline{r}_v = -4v\underline{i} + 2uv\underline{j} + u^2\underline{k}.$$

Az adott pontban

$$\underline{r}_u(1,-2) = (3,4,-5),$$

$$\underline{r}_v(1,-2) = (8,-4,1).$$

$$\underline{m} = -16\underline{i} - 43\underline{j} - 44\underline{k}.$$

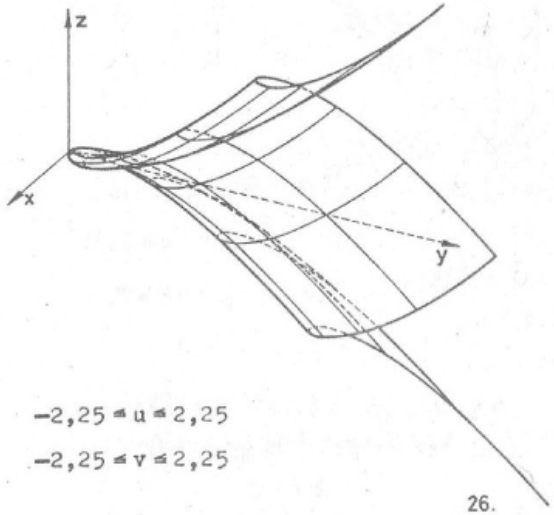
Az érintősik egyenlete tehát

$$16(x+7) + 43(y-4) + 44(z+3) = 0.$$

115. $2x + y + z - 2 = 0$.

116. $3x - 32y + 128z + 16 = 0$.

117. Nincs érintősik. (26.ábra)



$-2{,}25 \leq u \leq 2{,}25$

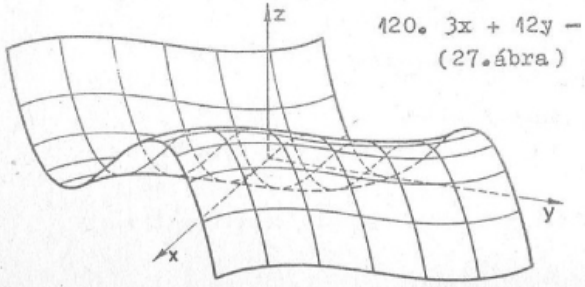
$-2{,}25 \leq v \leq 2{,}25$

26.

118. $6x + 3y - 2z - 7 = 0$.

119. $F'_x = y^2$, $F'_y = 2xy$, $F'_z = 3z^2$.
Az adott pontban $F'_x = 4$, $F'_y = 4$, $F'_z = 12$. Az érintősik egyenlete:
$x + y + 3z - 9 = 0$.

120. $3x + 12y - z - 18 = 0$. (27.ábra)



$-2 \leq x \leq 2$

$-2 \leq y \leq 2$

27.

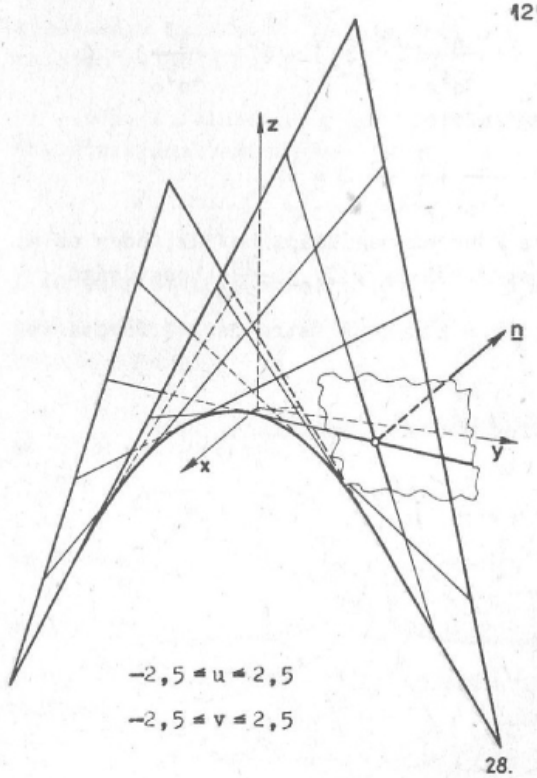
121. $3x - 2y + 3z - 4 = 0$.

122. $3x + 4y + 12z - 169 = 0$.

123. $xa \sin v_0 - ya \cos v_0 + zu_0 - au_0v_0 = 0$.

124. $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$.

125.



$-2{,}5 \leq u \leq 2{,}5$

$-2{,}5 \leq v \leq 2{,}5$

28.

A felületi normális $\underline{r}_u \times \underline{r}_v = (u + v)\underline{i} + (v - u)\underline{j} - 2\underline{k}$ csak úgy lehet párhuzamos az adott sík normálvektorával, ha annak (-1)-szerese. Ez az $u = \frac{1}{2}$, $v = -\frac{3}{2}$ paraméterű $P(-1{,}2, -\frac{3}{4})$ pontban teljesül.

A keresett érintősik egyenlete tehát

$$2x + 4y + 4z - 3 = 0.$$

126. Irjuk a felület egyenletét $z = \frac{a^3}{xy}$ alakban. Mivel $z'_x(x_0,y_0) = -\frac{a^3}{x_0^2y_0}$ és $z'_y(x_0,y_0) = -\frac{a^3}{x_0y_0^2}$, a $P(x_0,y_0,\frac{a^3}{x_0y_0})$ ponton áthaladó érintősik egyenlete

$$\frac{a^3}{x_0^2y_0}(X - x_0) + \frac{a^3}{x_0y_0^2}(Y - y_0) + (Z - \frac{a^3}{x_0y_0}) = 0.$$

Az érintősik egyenletét az

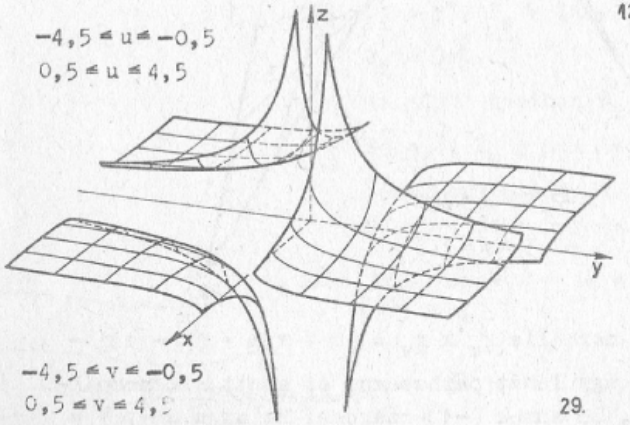
$$\frac{X}{3x_0} + \frac{Y}{3y_0} + \frac{x_0y_0}{3a^3}Z = 1$$

alakra rendezve könnyen megállapithatjuk, hogy az a koordinátatengelyekből $3x_0$, $3y_0$, $\frac{3a^3}{x_0y_0}$ hosszúságú darabokat vág le. A keresett tetraéder térfogata tehát

$$V = \frac{27}{6}a^3$$

valóban független a P pont megválasztásától.

127.



29.

$$x + y + z - 3 = 0.$$

(A felületet lásd a 29. ábrán.)

128. A felület $P(x_0,y_0,z_0)$ pontjához tartozó érintősikjának egyenlete:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x_0}}x + \frac{1}{\sqrt[3]{y_0}}y + \frac{1}{\sqrt[3]{z_0}}z = a^{2/3}.$$

A tengelymetszetek rendre

$$3\sqrt{x_0}\cdot a^{2/3},\quad 3\sqrt{y_0}\cdot a^{2/3} \quad \text{és} \quad 3\sqrt{z_0}\cdot a^{2/3}$$

hosszúságú szakaszok, amelyeknek négyzetösszege valóban állandó (a^2).

129. A felület $P(x_0,y_0,z_0)$ pontjához tartozó érintősikjának egyenlete

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{a}.$$

A tengelymetszetek rendre $\sqrt{x_0a}$, $\sqrt{y_0a}$, $\sqrt{z_0a}$, amelyeknek összege $\sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a$, valóban állandó.

130. A felület $P(x_0,y_0,z_0)$ pontjához tartozó érintősikjának egyenlete:

$$x_0^{n-1}x + y_0^{n-1}y + z_0^{n-1}z = a^n.$$

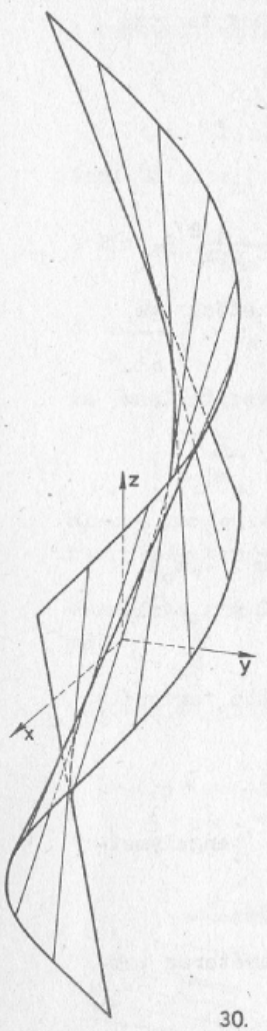
Az $OA = \frac{a^n}{x_0^{n-1}}$, $OB = \frac{a^n}{y_0^{n-1}}$, $OC = \frac{a^n}{z_0^{n-1}}$ tengelymetszetek összege 1, vagyis az állitás igaz.

131. A felületet előállitó kétparaméteres vektorfüggvény

$$\underline{r}(u,v) = a(\cos u - v\sin u)\underline{i} + a(\sin u + v\cos u)\underline{j} + b(u + v)\underline{k}.$$

A felületi normális

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = (-abv\sin u, abv\cos u, -a^2v).$$



30.

Ha $v = 0$, akkor $\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \underline{o}$.
Ha $v \neq 0$, akkor $\underline{r}_u \times \underline{r}_v \parallel$ a $(-b \sin u, b \cos u, -a)$ vektorral, amelynek a $\underline{k}$ egységvektorral bezárt szögére

$$\cos\varphi = \frac{-a}{\sqrt{b^2 + a^2}},$$

a felületi pont megválasztásától független érték.

132. A $z = \operatorname{tg} xy$ felület normálisa $\left(\frac{-y}{\cos^2 xy}, \frac{-x}{\cos^2 xy}, 1\right)$. Az $x^2 - y^2 = a^2$ felület kétparaméteres vektoregyenlete $\underline{r}(u,v) = \underline{i}\, a \operatorname{ch} u + \underline{j}\, a \operatorname{sh} u + \underline{k} v$, a felületi normálisa tehát $\underline{n}_2(a \operatorname{ch} u, -a \operatorname{sh} u, 0)$. Számítsuk ki az $\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2$ skalárszorzatot a két felület közös pontjaiban, vagyis az $x = a \operatorname{ch} u$, $y = a \operatorname{sh} u$ helyen:

$$\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = 0.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \pi$$

$$-2 \leq v \leq 2$$

133. A deriváltvektorok az adott helyen a következők:

$$\underline{r}_u(1,0,1), \quad \underline{r}_v(0,1,-1),$$

$$\underline{r}_{uu}(1,0,0), \quad \underline{r}_{uv}(0,0,0), \quad \underline{r}_{vv}(0,1,0),$$

$$\underline{m}^o\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

A Gauss-féle főmennyiségek a következők:

$$E = 2, \quad F = -1, \quad G = 2, \quad L = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

innen $\dot{u} = 2$, $\dot{v} = 1$ választással

$$\frac{1}{R_\varphi} = -\frac{1}{3}$$

adódik.

134. Az $x = u$, $y = v$ paraméterezéssel a felület vektoregyenlete $\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + v\underline{j} + (2u^2 + 4{,}5v^2)\underline{k}$, $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = 1$. $R = \frac{2}{13}$.

135. $\frac{1}{R} = \frac{2}{49\sqrt{5}}$.

136. A normálmetszet érintővektorát felírjuk az adott pontban kiszámított $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ vektorok lineáris kombinációjaként. Mivel $\underline{r}_u(4,2,4)$ és $\underline{r}_v(-2,-5,4)$, az első két koordináta felhasználásával

$$\dot{\underline{r}} = 2\underline{r}_u + 3\underline{r}_v.$$

Eszerint $\dot{u} = 2$, $\dot{v} = 3$ és az $\dot{\underline{r}}$ vektor harmadik koordinátája 20.

$$\underline{m}^o\left(\frac{7}{\sqrt{101}}, -\frac{6}{\sqrt{101}}, \frac{4}{\sqrt{101}}\right),$$

$$E = 36, \quad F = -2, \quad G = 45, \quad L = -\frac{46}{\sqrt{101}}, \quad M = \frac{10}{\sqrt{101}},$$

$$N = -\frac{32}{\sqrt{101}}, \quad \frac{1}{R} = \frac{-352}{525\sqrt{101}}.$$

137. $\frac{1}{R} = \frac{8\sqrt{2}}{(5 + \pi^2)\sqrt{4 + \pi^2}}$.

138. $E = 2$, $F = \frac{1}{2}$, $G = \frac{5}{4}$, $L = -\frac{1}{6}$, $M = \frac{1}{12}$, $N = -\frac{1}{24}$, $\frac{1}{R} = \frac{1}{51}$.

139. A gömbfelület vektoregyenlete

$$\underline{r}(u,v) = \underline{i}\, R \cos u + \underline{j}\, R \sin u \sin v + \underline{k}\, R \sin u \cos v,$$

ahol R a gömb sugara.

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R}\,, \quad \frac{1}{R_\varphi} = \frac{1}{R\cos\varphi}\,.$$

140. A deriváltvektorok az adott pontban $\underline{r}_u(1,1,1)$, $\underline{r}_v(1,-1,1)$, $\underline{r}_{uu}(0,0,0)$, $\underline{r}_{uv}(0,0,1)$, $\underline{r}_{vv}(0,0,0)$. $\underline{m}^0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$A\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$ egyenletből $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \pm 1$, vagyis

$\dot{\underline{r}}_1 = \underline{r}_u + \underline{r}_v = (2,0,2)$ és $\dot{\underline{r}}_2 = \underline{r}_u - \underline{r}_v = (0,2,0)$.
Mivel $|\underline{r}_u| = |\underline{r}_v|$, a főirányok éppen a paramétervonalak szögfelezői.

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\,, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

141. $$A\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ egyenletből $2\dot{u}\dot{v} = 0$,

tehát a főirányok a következők:

$$\dot{u}_1 = 0,\ \dot{v}_1 = 1 \text{ esetén } \dot{\underline{r}}_1 = \underline{r}_v,$$

$$\dot{u}_2 = 1,\ \dot{v}_2 = 0 \text{ esetén } \dot{\underline{r}}_2 = \underline{r}_u.$$

Ez azt jelenti, hogy a főirányok a paramétervonalak érintői, a paramétervonalak adott pontbeli görbületei pedig a főgörbületek.

Megjegyzés: A paramétervonalak akkor és csak akkor főgörbületi vonalak, ha a felület minden pontjában $F = 0$ és $M = 0$ áll fenn (ami itt teljesül).

$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{R_2} = 0$ az adott ponton áthaladó parallelkör és alkotóegyenes görbülete.

142. $H = \frac{45}{7\sqrt{154}}$, $K = \frac{18}{5929}$.

143. A felület tetszőleges pontjában $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$.
Vagy a 141. feladat megoldásánál kimondott tételre hivatkozunk, amely szerint $F = 0$, $M = 0$ miatt a feladat állítása igaz, vagy felirjuk a főirányok meghatározására szolgáló egyenletet:

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$ ahonnan $\dot{u}\dot{v} = 0$ adódik.

Tehát $\dot{\underline{r}}_1 = \underline{r}_u$, $\dot{\underline{r}}_2 = \underline{r}_v$, vagyis az állítás igaz.

144. Az adott pontban $\underline{r}_u(-2,-2,1)$, $\underline{r}_v(-2,-2,-1)$ és $\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \pm 1$. Mivel $|\underline{r}_u| = |\underline{r}_v|$, az

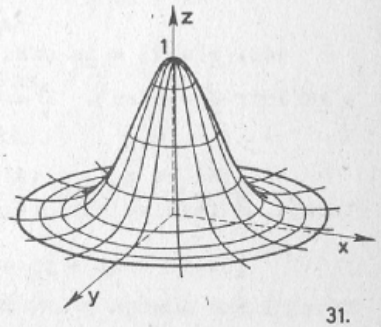
$\dot{\underline{r}}_1 = \underline{r}_u + \underline{r}_v = (-4,-4,0)$ és az

$\dot{\underline{r}}_2 = \underline{r}_u - \underline{r}_v = (0,0,2)$ vektorok az $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ szögének, illetve mellékszögének szögfelezői.
Az $\dot{\underline{r}}_1$ és az $\underline{m}$ vektorokra illeszkedő fősik $\dot{\underline{r}}_1 \perp \dot{\underline{r}}_2$ és $\underline{m} \perp \dot{\underline{r}}_2$ miatt merőleges az $\dot{\underline{r}}_2$ vektorra, továbbá áthalad a felület $\underline{r}(-1,-1) = 2\underline{i} + 2\underline{j}$ helyvektorú pontján. Az egyenlete tehát $z = 0$. A másik fősik normálvektora pedig az $\dot{\underline{r}}_1$, az egyenlete $x + y = 4$.

145. A Gauss-féle főmennyiségek az adott pontban $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $L = -2$, $M = 0$, $N = -2$. A főirányok meghatározására szolgáló

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet $\dot{u}$ és $\dot{v}$ értékétől független $0 = 0$ azonosság, vagyis az adott pontban minden irány főirány, és



31.

mivel $\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = 4 > 0$, az adott pont gömbi pont.

146. Az $u = x$ paraméterezéssel a meridiángörbe egyenlete $\underline{r}(u) = u\underline{i} + \sin u\underline{j}$, a forgásfelület vektoregyenlete pedig $\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + \sin u \cos v\,\underline{j} + \sin u \sin v\,\underline{k}$ alakban írható. A felület tetszőleges pontjában $E = 1 + \cos^2 u$, $F = 0$, $G = \sin^2 u$, $L = \frac{\sin u}{\sqrt{1 + \cos^2 u}}$, $M = 0$, $N = \frac{\sin u}{\sqrt{1 + \cos^2 u}}$. A főirányok meghatározására szolgáló egyenlet szerint $\dot{u}\dot{v} \cdot \sin u \cdot 2\cos^2 u = 0$. Minden irány akkor főirány, ha $u = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ (ezek a gömbi pontok) és $u = \pm k\pi$, amelyek viszont planáris pontok.

Tehát a felület gömbi pontjai az $x = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$ $(k = 0,1,2,\dots)$ pontok megforgatásával keletkeznek.

147. $H = 0$, $K = -\frac{a^2}{(a^2 + u^2)^2}$, az állandó szorzatgörbületü pontok csavarvonalon helyezkednek el.

148. Az $\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + ch u \cos v\,\underline{j} + ch u \sin v\,\underline{k}$ forgásfelület pontjában

$$E = ch^2 u, \quad F = 0, \quad G = ch^2 u,$$

$$L = -\frac{ch u}{\sqrt{1 + sh^2 u}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{ch u}{\sqrt{1 + sh^2 u}}, \quad H = 0.$$

149. $\underline{r}(u,v) = \underline{i}a \sin u \cos v + \underline{j}a \sin u \sin v + \underline{k}a(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u)$. $K = -\frac{1}{a^2}$.

150. Ha az x és y változókat választjuk paramétereknek, a felület vektoregyenlete:

$$\underline{r}(x,y) = x\underline{i} + y\underline{j} + (\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6})\underline{k}.$$

Mivel $E = 1 + x^2$, $F = -\frac{xy}{3}$, $G = 1 + \frac{y^2}{9}$,

$L = \frac{1}{|\underline{r}_x \times \underline{r}_y|}$, $M = 0$, $N = -\frac{1}{3|\underline{r}_x \times \underline{r}_y|}$, a $H = 0$ feltételből $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ adódik. A keresett pontok

tehát e hiperbola felett helyezkednek el, amely pontok a felületnek a $z = 1$ sikkal alkotott metszéspontjai.

151. A Gauss-féle másodrendü főmennyiségek helyett elegendő az $|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| \cdot L = D \cdot L$, $|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| M = DM$ és $|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| N = DN$ mennyiségeket kiszámitani. Mivel

$$D^2(LN - M^2) = \pi^2 > 0,$$

az adott pont elliptikus.

152. Hiperbolikus.

153. Hiperbolikus.

154. A tórusz tetszőleges pontjában $L = b$, $M = 0$, $N = (a + b \cos u)\cos u$. $LN - M^2 = b(a + b \cos u)\cos u$. Az $a > b$ kikötés miatt $a + b \cos u > 0$, tehát $LN - M^2$ előjele $\cos u$ előjelével egyezik meg. Ezek szerint ha $u = \pm \frac{\pi}{2}$, a felületi pontok parabolikusak, ha $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ (külső tórusz), akkor elliptikusak és ha $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$ (belső tórusz), akkor hiperbolikusak.

155. Minden pont elliptikus.

156. Minden pont parabolikus.

157. Minden pont hiperbolikus.

158. Minden pont hiberbolikus.

159. $z''_{xx} z''_{yy} - z''^2_{xy} = \frac{3}{x^4 y^4} > 0$, ezért minden pont elliptikus.

160. A felület a $z = e^{-x^2}$ görbe z tengely körüli forgatásával áll elő.

$$z''_{xx} z''_{yy} - z''^2_{xy} = e^{-2(x^2+y^2)}\left[(-2 + 4x^2)(-2 + 4y^2) - 16x^2y^2\right] = e^{-2(x^2+y^2)}\left[4 - 8x^2 - 8y^2\right] \gtrless 0,$$

ha $x^2 + y^2 \lessgtr \frac{1}{2}$.

A felület elliptikus pontjai az origó középpontú, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sugarú körtartomány belseje felett, a parabolikus pontok a körvönal felett, a hiperbolikus pontok pedig a körön kivüli sikrész felett helyezkednek el.

161. Minden pont hiperbolikus.

162. Ha $\frac{(2k-1)^2\pi^2}{16} < x^2 + y^2 < \frac{k^2\pi^2}{4}$ $(k = 1,2,\dots)$, akkor a pont hiperbolikus.

Ha $x^2 + y^2 = \frac{k^2\pi^2}{16}$, akkor a pont parabolikus.

Ha $\frac{k^2\pi^2}{4} < x^2 + y^2 < \frac{(2k+1)^2\pi^2}{16}$, akkor a pont elliptikus.

163. $D^2(LN - M^2) = -9(u - v)^3$

A felület pontja tehát az $u = v$ feltétel mellett parabolikus, ezek az $\underline{r}(u) = 2u\underline{i} + u^2\underline{j} + 2u^3\underline{k}$ felületi görbe pontjai.

164. $D = \sqrt{4u^2 + 9v^2(1 + 4u^2)}$, ezért az $u = 0$, $v = 0$ paraméterü pontot ki kell zárni.

$$DL = 6v^2, \quad M = 0, \quad DN = 12uv$$

$$D^2(LN - M^2) = 72uv^3.$$

A felület parabolikus pontjai tehát az $u = 0$, $v \neq 0$ és a $v = 0$, $u \neq 0$ paramétervonalak pontjai.