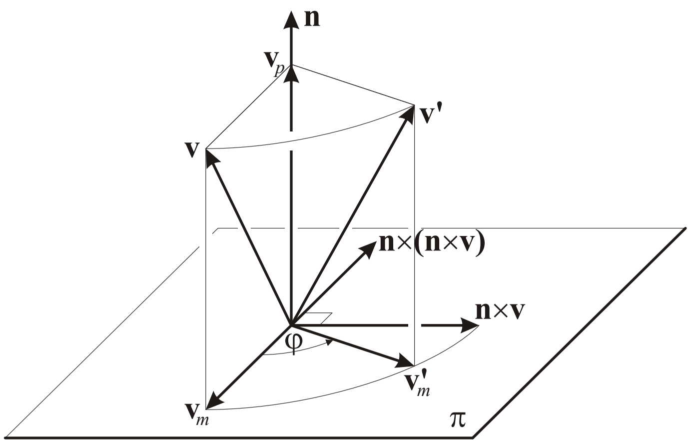
A tér fixponttal rendelkező egybevágóságainak leírása



Vektoriális szorzás:

$\mathbf{n} = (a,\ b,\ c)^{\mathrm{T}}$ adott egységvektor:

$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$

$\mathbf{n} \times (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{n} \times \mathbf{a}) + \beta(\mathbf{n} \times \mathbf{b})$

a tér lineáris leképezése π-re ($\pi \perp \mathbf{n}$)

i, j, k a koordináta egységvektorok

$\mathbf{n} \times \mathbf{i} = (0,\ c,\ -b)^{\mathrm{T}}$

$\mathbf{n} \times \mathbf{j} = (-c,\ 0,\ a)^{\mathrm{T}}$

$\mathbf{n} \times \mathbf{k} = (b,\ -a,\ 0)^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{n} \times \mathbf{v} = \mathbf{C}_n\mathbf{v}$$

tetszőleges **v**-re.

Párhuzamos és merőleges összetevők:

A **v** vektor **n**-re merőleges összetevője $\mathbf{v}_m = -\,\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{C}_n^2\mathbf{v}$; merőleges vetítés π-re: $\mathbf{P}_n = -\mathbf{C}_n^2$

A **v** vektor **n**-nel párhuzamos összetevője: $\mathbf{v}_p = \mathbf{v} - \mathbf{v}_m = (\mathbf{1} + \mathbf{C}_n^2)\mathbf{v}$; merőleges vetítés az **n** irányvektorú egyenesre: $\mathbf{L}_n = (\mathbf{1} + \mathbf{C}_n^2)$. Másrészt $\mathbf{v}_p = \mathbf{n}(\mathbf{n}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}) = (\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}})\mathbf{v}$ (diadikus szorzat), így $\mathbf{L}_n = \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}}$ és $\mathbf{C}_n^2 = \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}} - \mathbf{1}.$

$$\mathbf{L}_n = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{P}_n = \begin{bmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C}_n^2 = \begin{bmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & bc \\ ac & bc & c^2-1 \end{bmatrix}.$$

Egybevágóságok:

Mivel $|\mathbf{n}| = 1$, ezért $|\mathbf{v}_m| = |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v})| = |\mathbf{n} \times \mathbf{v}|$. Így a **v** vektor **n** körüli φ szögű elforgatottjának, **v'**-nek **n**-re merőleges összetevője $\mathbf{v}'_m = \mathbf{v}_m \cos\varphi + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \sin\varphi$, míg a párhuzamos összetevő nem változik: $\mathbf{v}_p$. Jelölje $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'$ a **v** vektor elforgatottját, $\mathbf{v}'_2$ pedig ennek π-re vonatkozó tükörképét (**v** forgatva tükrözöttjét). Ekkor

$$\mathbf{v}'_{12} = \mathbf{v}_m \cos\varphi + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \sin\varphi \pm \mathbf{v}_p = -\mathbf{C}_n^2\mathbf{v}\cos\varphi + \mathbf{C}_n\mathbf{v}\sin\varphi \pm (\mathbf{1} + \mathbf{C}_n^2)\mathbf{v} =$$
$$= [(\pm 1 - \cos\varphi)\,\mathbf{C}_n^2 + \sin\varphi\ \mathbf{C}_n \pm \mathbf{1}]\mathbf{v}$$

Így az origót fixen hagyó egybevágóságok egységesen $(\pm 1 - \cos\varphi)\,\mathbf{C}_n^2 + \sin\varphi\ \mathbf{C}_n \pm \mathbf{1}$ alakban írhatók $\mathbf{C}_n$ másodfokú polinomjaként.

$\mathbf{R}_{n,\varphi} = (1 - \cos\varphi)\,\mathbf{C}_n^2 + \sin\varphi\ \mathbf{C}_n + \mathbf{1}$ orientáció tartó egybevágóságok, *forgatások;*

$\overline{\mathbf{R}}_{n,\varphi} = -(1 + \cos\varphi)\,\mathbf{C}_n^2 + \sin\varphi\ \mathbf{C}_n - \mathbf{1}$ orientáció váltó egybevágóságok, *forgatva tükrözések.*

Speciális esetek:

Féfordulat (egyenesre vonatkozó tükrözés): $\mathbf{2}_n = \mathbf{R}_{n,180^\circ} = 2\mathbf{C}_n^2 + \mathbf{1} = 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}} - \mathbf{1};$

Síkra vonatkozó tükrözés: $\mathbf{M}_n = \overline{\mathbf{R}}_{n,0^\circ} = -2\mathbf{C}_n^2 - \mathbf{1} = \mathbf{1} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}};$

Pontra vonatkozó tükrözés: $\bar{\mathbf{1}} = \overline{\mathbf{R}}_{n,180^\circ} = -\mathbf{1};$

$$\mathbf{2}_n = \begin{bmatrix} 2a^2-1 & 2ab & 2ac \\ 2ab & 2b^2-1 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2-1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{bmatrix}; \qquad \bar{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$