9. hét

Teljes függvényvizsgálat

Végezzük el az alábbi függvények vizsgálatát! *(A*-gal jelölt függvényeket nem tudjuk a szokásos módon diszkutálni, mert a deriváltak vizsgálata túl bonyolult, és meglévő eszközeinkkel lehetetlen is. Így ezeknél csak nagyjából (elég nagy pontatlansággal) tudjuk felvázolni a grafikont.)*

a) x^4-4x^3 b) x^5+5x^4 c) $(x-1)^2(x^2-x+8)$

d) $3x^3+3x^2-18x$ e) $\frac{x^2-x-2}{x^2-3x-4}$ f) $\frac{x}{1+x^2}$

g) $\frac{1}{1-x^2}$ h) $\frac{x}{x^2-1}$ i) $x+\frac{1}{x}$ j) $\frac{x^2}{1+x}$

k) $\frac{x^3}{x^2-4}$ l) $\frac{x^2-5x+6}{x+1}$ m) $\frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}$ n) e^{-x^2}

o) $x\cdot e^x$ p) $\frac{e^x}{x}$ q) $\frac{x}{e^x}$ r) $x\cdot e^{-x^2}$

s) $x^2\cdot\ln(x)$ t) $\frac{\ln(x)}{x}$ u) $x^2\cdot\ln(x^2)$ v) x^x

* w) $\frac{\sin(x)}{x}$ * y) $\frac{\cos(x)}{x}$ * z) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Logaritmikus deriválás módszere

Számítsuk ki a következő függvények derivált függvényét! *(Kezdjük minden esetben az értelmezési tartomány meghatározásával a feladatmegoldást!)*

a) x^{8x^2+x-1} b) $\left(x^2+1\right)^{1-x}$ c) $x^{\ln(x)}$ d) $(\cos(x))^{\frac{1}{x}}$

e) $(\sin(x))^{tg(x)}$ f) $(arctg(x))x^2$ g) $(\ln(x))^{\cos(x)}$ h) $(sh(x))^{e^x}$

Implicit alakban adott függvények deriválása

1) Az $3x^2y^2+\frac{24x}{y}=0$ implicit alakban adott y függvénynek határozzuk meg az $x_0=-1$ helyhez tartozó y_0 értékét (esetleg több is lehet), majd írjuk fel az y' deriváltfüggvényt, és a $P(x_0;y_0)$ pontban írjuk fel az érintőegyenes egyenletét (ha létezik)!

2) Az $x^2y-\frac{y}{x^2}+y^4=1$ implicit alakban adott y függvénynek határozzuk meg az $x_0=1$ helyhez tartozó y_0 értékét (esetleg több is lehet), majd írjuk fel az y' deriváltfüggvényt, és a $P(x_0;y_0)$ pontban írjuk fel az érintőegyenes egyenletét (ha létezik)!

3) Legyen az y függvény az $x-\frac{1}{\pi}y+\sin(x-y)=-1$ implicit alakban adott! Döntsük el, hogy a $P(0;\pi)$, illetve a $Q\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ pont illeszkedik-e a függvény grafikonjára! Ha illeszkedik, akkor írjuk fel az y' deriváltfüggvényt és az érintőegyenes egyenletét az adott pontban (ha létezik)!

Paraméteres alakban adott függvények deriválása

1) Tekintsük a következő, paraméteres alakban adott görbét!

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + 9 \\ y(t) = t^4 + t^2 - 8 \end{cases} \quad \text{ahol } t \in [0;\infty).$$

Írjuk fel a $t_0 = -1$ paraméterértékű P_0 pontot, határozzuk meg a $\frac{dy}{dx}$ deriváltat ezen a helyen (ha létezik), és írjuk fel az érintőegyenes egyenletét ebben a pontban (ha létezik)!

2) Tekintsük a következő, paraméteres alakban adott görbét!

$$\begin{cases} x(t) = t^4 - 16 \\ y(t) = t - 3 \end{cases} \quad \text{ahol } t \in [0;\infty).$$

Az $x_0 = 0$ koordinátához határozzuk meg a megfelelő paraméterérték(ek)et, és a megfelelő $P(x;y)$ görbeponto(oka)t! Határozzuk meg a $\frac{dy}{dx}$ deriváltat ez(ek)en a hely(ek)en (ha léteznek), és írjuk fel az érintőegyenes(ek) egyenletét is (ha léteznek)!

3) Tekintsük a következő, paraméteres alakban adott görbét!

$$\begin{cases} x(t) = t \cdot \sin(t) \\ y(t) = 3t \cdot \cos(t) \end{cases} \quad \text{ahol } t \in [0;\infty).$$

Írjuk fel a $t_0 = \frac{3\pi}{4}$ paraméterértékű P_0 pontot, határozzuk meg a $\frac{dy}{dx}$ deriváltat ezen a helyen (ha létezik), és írjuk fel az érintőegyenes egyenletét ebben a pontban (ha létezik)!

4) Tekintsük a következő, paraméteres alakban adott görbét!

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \quad \text{ahol } t \in [0;\infty).$$

Írjuk fel rendre a $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $t_1 = \pi$, $t_2 = \frac{\pi}{6}$ paraméterértékhez tartozó P_0, P_1, P_2 pontot, határozzuk meg a $\frac{dy}{dx}$ deriváltat ezeken a helyeken (ha léteznek), és írjuk fel az érintőegyenesek egyenletét ezekben a pontokban (ha léteznek)!

Halmschlager Andrea