7-8. hét
Differenciálszámítás alapjai

1) Lássuk be, hogy $\forall x_0 \in D_f$ helyen differenciálható az $f(x)$ függvény: írjuk fel a differenciálhányadost, és a deriváltfüggvényt is!

a) $f(x) = c$ b) $f(x) = x^n$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = \sin(x)$ e) $f(x) = \ln(x)$

f) $f(x) = \cos(x)$ g) $f(x) = e^x$ h) $f(x) = a^x \quad (a > 0)$

2) Lássuk be, hogy ha f és g deriválható függvények, akkor $c \cdot f$ és $f + g$ is az, és $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, illetve $(f + g)' = f' + g'$!

3) Határozzuk meg az a és b paraméter értékét úgy, hogy a függvény a teljes $\mathbb{R}$-en differenciálható legyen!

$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x \geq 0 \\ ax + b & x < 0 \end{cases}$ | $g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x \geq 1 \\ ax + b & x < 1 \end{cases}$ | $h(x) = \begin{cases} \ln(x) & x \geq 3 \\ ax^3 & x < 3 \end{cases}$ | $k(x) = \begin{cases} \sin(x) & x \geq 0 \\ ax^2 + bx & x < 0 \end{cases}$

4) Írja fel az $y = f(x)$ görbéhez a megadott x_0 pontban az érintőegyenes egyenletét!

a) $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$ és $x_0 = 2$ b) $f(x) = 3\sin(x)$ és $x_0 = \pi/4$

c) $f(x) = 4\sqrt{x}$ és $x_0 = 9$ d) $f(x) = 10\ln(x) + 9$ és $x_0 = e$

5) Mely x_0 pontban lesz az $y = f(x)$ görbéhez húzott érintő párhuzamos a megadott $e(x)$ egyenessel?

a) $f(x) = x^5 + 3x$ és $e(x) = 8x - 1$ $f(x) = x^5 + 3x$ és $e(x) = -x + 1$

6) Mely x_0 pontban lesz az $y = f(x)$ görbéhez húzott érintő merőleges a megadott $e(x)$ egyenesre?

a) $f(x) = 3\cos(x)$ és $e(x) = \dfrac{x}{3} + 7$ b) $f(x) = \ln(x)$ és $e(x) = -5x - 1$

7) Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit (ahol léteznek)!

a) $2e^x - 18\sin(x) + log_2(x) + \sqrt[3]{x}$ b) $\frac{-2}{x^2} + \frac{3}{x^{-3}} - \frac{1}{x^{0.2}}$ c) $\sqrt{x^2 \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}}$ d) $(5\mathrm{x} - 3)\sin(x)$

e) $5^x \cdot \ln(x)$ f) $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right) sh(x) - x^{-2} \cdot arctg(x) \cdot \ln(x)$ g) $\frac{ch(x)}{-5x+1}$

h) $ctg(x)$ i) $\frac{arcth(x)}{2x^2}$ j) $\ln(ch(x))$ k) $\ln(th(6x))$ i) $log_2(x^3 - \frac{1}{x})$

j) $\frac{x^4 - 3x + 7}{5x^2 + 3}$ k) $e^{x^2 - 2\cos(3x)}$ l) $2^{\sqrt{x - x^2}}$ m) $arcctg\left(\frac{2x}{1+x}\right)$ n) x^x

o) $(\sin(x))^x$ p) $\left(\sqrt{x}\right)^{cos^2(x)}$ q) $\sqrt[x]{5x} - \frac{e^{2x}}{\sin(-x)} + (\sqrt{x+3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}) \cdot tg(x)$

8) Számítsuk ki az alábbi határértékeket! (Vizsgáljuk meg, hogy használható-e a L'Hospital szabál!)

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{arctg(x)}{x}$ c) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^5)}{x-1}$ d) $\lim_{x\to\infty} \frac{0,5\cdot 4^x}{x^3}$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$ f) $\lim_{x\to\infty} x \cdot arctg\left(\frac{1}{x}\right)$ g) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

h) $\lim_{x\to 0} \arcsin(x) \cdot ctg(x)$ i) $\lim_{x\to -\infty} e^x \cdot ln(-x)$

j) $\lim_{x\to 0+0} \left(\frac{\cos(x)}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$ k) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (tg(x))^{ctg(x)}$