

6. gyakorlat  
Függvények határértéke, folytonossága

1) Számítsuk ki az alábbi  $\infty$ - vagy  $-\infty$ -beli határértékeket!

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + x - 2}{-2x^3 - x + 7}$     b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 2}{-2x^3 - x + 7}$     c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^3}{-2x^2 + 4}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{2x} - 1}{2x - 9x}$     e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3})$     f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} - x \right)$

g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{7x}$     h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)^{1 + 2x^3}$     i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} \right)^{\sqrt{x}}$

2) Számítsuk ki az alábbi  $x_0 \in \mathbb{R}$  pontbeli határértékeket, és ha a függvénynek szakadása van  $x_0 \in \mathbb{R}$ -ban, akkor határozzuk meg szakadási hely típusát is!

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - x - 6}$     b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - x - 6}$     c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - x - 6}$     d)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}}$     f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$     g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$     h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\operatorname{tg}(7x)}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2}$     j)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x-4}}$     k)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^6}$     l)  $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{4}{1-x}}$

3) Vizsgáljuk meg, hol folytonosak az alábbi függvények! Folytonossá tehető-e a szakadási helyeken?

a)  $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2}$     b)  $f(x) = \frac{3}{\frac{2}{2x+1}}$     c)  $f(x) = \frac{1}{\sin(3x)}$

d)  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2(x-3)^2}$     e)  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$     f)  $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{1 - \cos(x)}$

4) Az  $a$  és  $b$  paraméter mely értékére lesz folytonos a függvény?

a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 1}{2x - 2} & x < 1 \\ 3x + a & x \geq 1 \end{cases}$     b)  $f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{tg}(x) & x < \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{ctg}(x) + b & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x < -\pi \\ ax + b & -\pi \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{x-1} & 3 < x \end{cases}$     d)  $f(x) = \begin{cases} -x^3 & x < -1 \\ ax^2 + b & -1 \leq x \leq 2 \\ 2^x & 2 < x \end{cases}$