

1. hét
Halmazok, teljes indukció

1) Legyenek a következő halmazok adottak:

$$\mathbf{M} = \{\text{Magyarország lakói}\}$$

$$\mathbf{F} = \{\text{a világ férfi lakói}\}$$

$$\mathbf{B} = \{\text{a világ barna hajú emberei}\}$$

Fejezzük ki ezen a halmazokkal a következő emberek halmazát (alaphalmaznak a világ embereinek halmazát tekintjük):

- az összes külföldi, barna hajú ember
- az összes nem barna hajú férfi
- az összes férfi és a magyar nők halmaza
- a barna hajú magyar férfiak
- a barna hajú magyar nők
- a magyar nem barna hajú nők

2) Legyen \mathbf{A} a páros természetes számok halmaza, \mathbf{B} a 4-nél kisebb természetes számok halmaza, \mathbf{C} pedig a 2-nél nem kisebb természetes számok halmaza!

- Adjuk meg a fenti halmazokat a szokásos matematikai jelölésekkel!
- A fenti halmazok közül a véges elemszámút adjuk meg elemei felsorolásával is!
- Állapítsuk meg, mik lesznek a következő halmazok elemei!

$$G = (A \setminus (B \cap C)) \cup ((A \setminus B) \setminus C) \text{ illetve } H = (\overline{A} \cap B) \cup (C \setminus \overline{B})$$

3) Hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket! (Venn-diagrammal elég levezetni.)

$$\text{a. } (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}); \quad \text{b. } (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B); \quad \text{c. } (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$$

4) Írjuk fel az $\{a; b; c\}$ halmaz összes részhalmazát! Hány részhalmaza van?

5) Hány részhalmaza van egy kilencelemű halmaznak? És általában egy n -elemű halmaznak?

6) Állapítsuk meg, hogy a következő összefüggések közül, amelyekben A , B és C tetszőleges halmazok, melyek igazak és melyek nem! (Elég Venn-diagrammal.)

$$\text{a. } A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C; \quad \text{b. } A \cap B \cap C = A \cap B \cap (B \cup C);$$

$$\text{c. } [A \setminus (A \setminus \overline{B})] \cup B = A \cup B; \quad \text{d. } (A \cup B) \setminus A = B$$

7) Ábrázoljuk a következő halmazokat a derékszögű koordináta-rendszerben! (Z az egész, R a valós számok halmaza.) $D = Z^+ \times Z^+$, $E = R \times Z$, $F = Z^+ \times R$, $G = \{(x; y) \mid x < 2, y > 3\}$, $H = \{(x; y) \mid x \leq 2, |y| = 3\}$

8) Igazoljuk teljes indukcióval az alábbi állításokat!

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

9) Keressünk képletet a kiszámítására, majd igazoljuk is teljes indukcióval!

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$$