3. hét
Polinomok
Számhalmazok korlátossága, inf, sup, min, max

1) Bontsuk fel elsőfokú tényezők szorzatára a $\mathbb{C}$ számtest fölött az alábbi polinomokat!

a) $2x^2 + 4$ b) $x^2 - 2x + 10$ c) $7x^2 - 70x + 182$ d) $x^3 - x^2 + 25x - 25$

e) $x^4 + 2x^3 + 36x^2 + 72x$ f) $5x^3 - 245x^2 + 265x$ g) $3x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 6x$

h) $x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 36x + 36$ i) $x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 3x^3 + x^2$

2) Egyszerűsítsük az alábbi racionális törtkifejezéseket! ($\mathbb{R}$ fölött végezzük a faktorizálást!)

a) $\frac{2x^2+2x-4}{5x+10}$ b) $\frac{x^3+x^2+x+1}{2x^3+2x}$ c) $\frac{x^4-2x^3+36x^2-72x}{7x^3-49x^2+70x}$ d) $\frac{x^5-2x^4+6x^3-10x^2+5x}{x^3-2x^2+x}$

3) Vizsgáljuk meg az alábbi valós számhalmazokat korlátosság (alulró, felülről korlátosság) szempontjából! Adjunk meg alsó és felső korlátot, ha van! Amennyiben lehetséges, adjuk meg a számhalmaz infimumát, szuprémumát, minimumát, maximumát!

   a) P=$\{n \in \mathbb{Z} : n = 2k + 1$ és $k \in \mathbb{Z}\}$

   b) M=$\{x_n \in \mathbb{R} : x_n = (-1)^n$ és $n \in \mathbb{N}\}$

   c) S=$\{x_n \in \mathbb{R} : x_n = 1 - \frac{1}{n}$ és $n \in \mathbb{N}^+\}$

   d) H=$\{x_n \in \mathbb{R} : x_n = -n^2$ és $n \in \mathbb{N}\}$

4) Bizonyítsuk be, hogy az S=$\{x_n \in \mathbb{R} : x_n = 1 - \frac{1}{n}$ és $n \in \mathbb{N}^+\}$ számhalmaznak az 1 valóban szuprémuma! (Definícióval!)

5) Bizonyítsuk be, hogy a H=$\{x_n \in \mathbb{R} : x_n = -n^2$ és $n \in \mathbb{N}\}$ számhalmaz nem korlátos alulról! (Definícióval!)