2. hét

Relációk, komplex számok

1) Döntsük el, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk-e, s ha igen, nevezzük meg az általa generált osztályozás ekvivalenciaosztályait!

a) A={a sík pontjai}, és $x\rho y$ ha x és y ugyanazon az origó középpontú körön van
b) A={a sík pontjai}, és $x\rho y$ ha x és y ugyanazon az egység sugarú körön van
c) ℝ={valós számok}, és $x\rho y$ ha x és y négyzete egyenlő
d) ℕ={természetes számok}, és $x\rho y$ ha x osztója y-nak
e) P={valós együtthatós polinomok}, és $x\rho y$ ha x-nek és y-nak van közös ***valós*** gyöke

2) Legyen $z = 3 + 2i$, $u = -1 + i$, $v = 7i$ és $w = \frac{1}{2} - 8i$! Végezzük el az alábbi műveleteket!

a) $(z + u)v$
b) $\overline{u} + \overline{v}$
c) $\overline{u + v}$
d) $(u \cdot v)^2$
e) $|z - u| + v$
f) $3u + 2z - v$
g) $\overline{(\overline{4w + 10z}) \cdot v}$
h) $(u \cdot \overline{u}) \cdot i$
i) $\frac{1}{i \cdot \overline{z}}$
j) $\frac{2v \cdot w}{u}$
k) $\overline{\left(\frac{u - w}{v}\right)} \cdot (v - z)$
l) $\frac{|u^2 - v^2|^2}{i}$

3) Ábrázoljuk a komplex számsíkon az alábbi számhalmazokat!

a) $\mathrm{Im}(z) < -1$
b) $-2 < \mathrm{Re}(z) \le 3$
c) $|z| < 5$
d) $2 \le |z - i| \le 3$
e) $|2z - 6| > 4$
f) $|z + 2 - i| < 1$
g) $\mathrm{Im}(z) \ge \mathrm{Re}(z)$
h) $z^5 - 32 = 0$

4) Írjuk fel trigonometrikus alakban!

a) $i - 1$
b) $-2 + 2\sqrt{3}i$
c) $-9 - 9i$
d) $1 + \sqrt{3}i$
e) $\frac{1 + i}{1 - i}$
f) $\frac{-4}{3i}$
g) $(2 + 2i)^7$
h) $(-3 + \sqrt{3}i)^6$

5) Forgassuk el 60°-kal, majd nyújtsuk ötszörösére a $z = 2 - i$ komplex számot!

6) Adott a $w = 3 + 5i$ komplex szám. Adjuk meg egy négyzet négy csúcsát úgy, hogy a szimmetria középpontja az origó, s egyik csúcsa épp w legyen!

7) Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán! Hogy helyezkednek el a megoldások a komplex számsíkon?

a) $z^3 = -125$
b) $z^4 + 4i = 0$
c) $z^2 - 4z + 9 = 0$
d) $z^2 = \frac{(5 - i)(5 + i)}{13i}$
e) $i \cdot z^4 = 2i^2 - 7i^4 - 5i^6$
f) $z^2 + 5 + \frac{6}{z^2} = 0$
g) $z^2 + 6\overline{z} - |z|^2 = 10$ (algebrai alak, egyenletr.sz.)
h) $z^3 - z^2 + 17z + 87 = 0$ ($z = -3$ gyök)
i) $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$