4. gyakorlat
Számsorozatok

1) Írjuk fel az alábbi számsorozatok első öt tagját! Majd igazoljuk, hogy nem korlátosak felülről: egészen pontosan mutassuk meg, hogy M=10000-hez is létezik N küszöbindex úgy, hogy ha $n > N$, akkor $a_n > M$!

a) $a_n = 5n^2 - 10n$ b) $b_n = 2^{\sqrt{n}}$ c) $c_n = \frac{n^2}{\ln(n)}$

2) Írjuk fel az alábbi számsorozatok első öt tagját! Majd igazoljuk, hogy kovergensek, azaz $\exists A, \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu\colon\ n > \nu, akkor\ |a_n - A| < \varepsilon.$

a) $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ b) $b_n = \frac{2n+1}{3n^2+4}$ c) $c_n = \frac{n-1}{2n-8}$ d) $d_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^3$

3) Vizsgáljuk a következő számsorozatokat korlátosság, konvergencia, monotonitás szempontjából! Adjuk meg (ha létezik) az infimumot, szuprémumot, minimumot, maximumot, határértéket, torlódási pontokat!

a) $a_n = \frac{n-1}{n}$ b) $b_n = 1 + (-1)^n + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ c) $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

4) Konvergensek vagy divergensek az alábbi sorozatok? Ha konvergensek, adjuk meg a határértéket!

a) $\left(1 + \sqrt[n]{2}\right)\left(1 + \sqrt[n]{3}\right)\left(1 + \sqrt[n]{n}\right)$ b) $3\left(2 - \sqrt[n]{2n-1}\right)$

c) $\frac{3n^7+9n^2+5}{4n^7-2}$ d) $\frac{-n^3+2n^2}{n+10}$

e) $\frac{7n-9}{n^4+n^2}$ f) $n^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ g) $\frac{5^{2n}+3^n}{24^n}$

h) $\sqrt{2n+3} - \sqrt{n}$ i) $n^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-n}\right)$ j) $\frac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n}$

k) $\sqrt[n]{1 + 2^n - 4^n + 5^n}$ l) $\frac{sin(n^2)}{7n-5}$ m) $\left(1 - \frac{8}{n}\right)^n$

n) $\left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$ o) $\left(\frac{n+2}{n}\right)^{3n-1}$ p) $\left(1 + \frac{1}{7n}\right)^{2n}$ q) $\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n$

r) $\left(\frac{n^3-7n-3}{n^3-7n}\right)^{2n^3+n-1}$ s) $\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)^{n!}$ t) $\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}}$

u) $\left(1 + \frac{\sqrt[n]{2n}}{n+7}\right)^n$ v) $\frac{1+2+3+\cdots+n}{3n^2-1}$

Halmschlager Andrea