

A3 szigorlat 2013. június 3.

/ Állításait minden esetben indokolja! /

Elméleti kérdések (30=6x4+2x3 pont)

1. Mit értünk a $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^3$ és $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ vektor vektoriális szorzatán? Pontosan mikor lesz a vektoriális szorzat $\mathbf{0}$? (4p)
2. Mondja ki a sorozatokra vonatkozó közrefogási ("rendőr") elvet! (4p)
3. Mondja ki az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pontbeli differenciálhányadosát! Mi a derivált geometriai jelentése? (4p)
4. Milyen numerikus sorokat nevezünk Leibnitz-típusúnak? Mit mondhatunk Libnitz-típusú sorok konvergenciájáról? (4p)
5. Milyen feltételek mellett lesz az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldásainak száma pontosan egy, illetve végtelen sok? (4p)
6. Definiálja egy négyzetes mátrix sajátértékét, sajátvektorát! (4p)
7. Mikor nevezünk egy vektormezőt harmonikusnak? (3p)
8. Mondja ki a Stokes-tételt! (3p)

Feladatok (70 pont)

- Írja fel annak az origóra illeszkedő síknak az egyenletét, amely merőleges mind a $-x + 2y + z = 4$, mind az $x + 3y = 1$ síkra!
Határozza meg a $P = (1; 1; 1)$ pont távolságát ettől a síktól!
Írja fel a két eredeti sík metszésvonalának egyenletét! (4+2+4p)
- Végezze el az $f(x) = x \cdot \sqrt{x-1}$ függvény teljes függvényvizsgálatát! (Ferde aszimptota létezését is vizsgálja meg!) (10p)
- Számítsa ki az alábbi integrálok értékét! (5+5p)
 - $\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}$
 - $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^4+2x^2+1}$
- Vizsgálja meg az alábbi egyenletrendszer megoldhatóságát és a megoldások számát a c paraméter függvényében! Írja fel a megoldást (ha létezik) a $c = 0$ paraméter érték esetén! (4+2+4p)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \quad (2)$$

$$2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2 \quad (3)$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + cx_4 = 0 \quad (4)$$

- Végezze el az alábbi sorfejtéseket! (4+6p)
 - $f(x) = \frac{1}{3-x}$ függvény $x_0 = 1$ körüli hatványsora,
 - $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{ha } 0 \leq x < \pi \end{cases}$ Fourier sora.

- Adott a térerősség a következő alakban:

$$E = (3x + 2xz) \cdot \mathbf{i} + (2y^2 + 5xz) \cdot \mathbf{j} + (5xy) \cdot \mathbf{k}.$$

Mekkora munkát végez az erőter, ha egy egységnyi ($1kg$) tömegű test mozog egy egyenes mentén a $P = (1; 2; -1)$ pontból a $Q = (-1; 2; 0)$ pontba? Állapítsuk meg, hogy potenciálos-e a vektormező, s ha igen, adjuk meg a potenciálfüggvényt! (5+5p)

- Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet (vagy kezdetiérték problémát)! Először határozza meg a típusát! (1+3+3+3p)

$$y' + \frac{y \cdot \sin(x) - 1}{\cos(x)} = 0, \text{ és } y(\pi) = 10.$$