A3 — képletgyűjtemény
Differenciál-egyenletek

1. Közönséges differenciál-egyenletek típusai:

- Szétválasztható:
$$y' = f(x)g(y)$$
- Homogén:
$$y' = f(x, y)$$
ahol f nulla-rendű homogén függvény, vagyis $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.
- Totális:
$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0$$
ahol M, N olyanok, hogy létezik $f(x, y)$ differenciálható függvény, melyre
$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$
- Általános lineáris n-ed rendű közönséges differenciál-egyenlet:
$$A_n(x)y^{(n)} + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_1(x)y' + A_0(x)y = B()x$$
Az egyenlet *homogén*, ha $B(x) \equiv 0$, egyébként *inhomogén*.
Speciális esetek:
  - Általános elsőrendű lineáris:
  $$A(x)y' + B(x)y = C(x)$$
  Az egyenlet *homogén*, ha $C(x) \equiv 0$, egyébként *inhomogén*.
    * Bernuolli-egyenlet:
    $$y' + p(x)y = q(x)y^n \qquad (n \neq 0, 1)$$
  - Általános másodrendű lineáris:
  $$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = D(x)$$
  Az egyenlet *homogén*, ha $D(x) \equiv 0$, egyébként *inhomogén*.
  - Állandó együtthatós n-edrendű lineáris közönséges differenciál-egyenlet:
  $$a_n y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$
  Az egyenlet *homogén*, ha $f(x) \equiv 0$, egyébként *inhomogén*.

2. Vegyes képletek

Laplace-transzformáció: Legyen f valós függvény, ennek *Laplace-transzformáltja* a következő:

$$\mathcal{L}\left(f\right)\left(z\right) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}\mathrm{d}t$$

minden olyan $z \in \mathbb{C}$-re, melyre az integrál létezik.

Tulajdonságok:

- Linearitás:

$$\mathcal{L}\left(\alpha f_1 + \beta f_2\right)\left(z\right) = \alpha\mathcal{L}\left(f_1\right)\left(z\right) + \beta\mathcal{L}\left(f_2\right)\left(z\right)$$

- $\mathcal{L}\left(tf\right)\left(z\right) = \mathcal{L}\left(f\right)'\left(z\right)$ illetve általánosan:

$$\mathcal{L}\left(t^n f\right)\left(z\right) = (-1)^n\mathcal{L}\left(f\right)^{(n)}\left(z\right)$$

- $\mathcal{L}\left(f'\right)\left(z\right) = z\mathcal{L}\left(f\right)\left(z\right) - y(0)$, illetve általánosan:

  $\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)\left(z\right) = z^n\mathcal{L}\left(f\right)\left(z\right) - z^{n-1}f(0) - z^{n-2}f'(0) - \ldots - zf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$

- Legyen az f és g *konvolúciója*:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\mathrm{d}s = (g * f)(t)$$

  Ekkor

$$\mathcal{L}\left(f * g\right)\left(z\right) = \mathcal{L}\left(f\right)\left(z\right) \cdot \mathcal{L}\left(g\right)\left(z\right)$$

- $\mathcal{L}\left(e^{\alpha t}f\right)\left(z\right) = \mathcal{L}\left(f\right)\left(z - \alpha\right)$
- $\mathcal{L}\left(e^{\alpha t}\right)\left(z\right) = \frac{1}{z-\alpha}$
- $\mathcal{L}\left(x^n\right)\left(z\right) = \frac{n!}{z^{n+1}}$

A Γ-függvény:

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Fontosabb tulajdonságok:

- Értelmezési tartomány:

$$\mathrm{D}_\Gamma = \{z | -z \notin \mathbb{N}\}$$

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\forall z \in \mathrm{D}_\Gamma)$
- $\Gamma(n+1) = n! \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Watson-lemma: Legyen az f valós függvény valós analítikus a 0-ban, továbbá $\alpha > -1$ és $\lambda > 0$ valós számok, ekkor:

$$\int_0^\infty t^\alpha f(t)e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\lambda^{\alpha+n+1}}$$