Görbék, felületek

Vegyes gyakorló feladatok

*(A *-gal megjelölt példák forrása: Reiman I., Nagyné dr. Szilvási M.: Geometriai feladatok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.)*

1) * Határozzuk meg az alábbi görbének a koordinátasíkokra eső merőleges vetületeit, és vázoljuk fel a grafikonjaikat is!
   $\underline{r}(t) = t\underline{i} + t^2\underline{j} + t^3\underline{k} \qquad t \in \Re$
2) * Milyen görbét alkotnak az alábbi görbe érintőinek az xy koordinátasíkkal való metszéspontjai?
   $\underline{r}(t) = t\underline{i} + t^2\underline{j} + t^3\underline{k} \qquad t \in \Re$
3) * Bizonyítsuk be, hogy az alábbi görbe illeszkedik az $x^2 + y^2 = z^2$ kúpfelületre, és annak minden alkotóját 45°-os szögben metszi (azaz az érintőegyenes az alkotóval ekkora szöget zár be)!
   $\underline{r}(t) = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\cos(t)\underline{i} + e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin(t)\underline{j} + e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\underline{k} \qquad t \in \Re$
4) * Írjuk fel az $x^2 + y^2 - 8 = 0$ és az xy-z+2=0 felület metszésvonalának érintővektorát és érintőegyenesének paraméteres egyenletrendszerét a P(2,2,6) pontban! (M.j.: NEM kell explicite felírni a görbe paraméteres alakját.)
5) * Írjuk fel az $z^2 + 2x - y^2 = 0$ és az 3x+y-z=0 felület metszésvonalának érintővektorát és érintőegyenesének paraméteres egyenletrendszerét a P(0,1,1) pontban! (M.j.: NEM kell explicite felírni a görbe paraméteres alakját. Próbálják meg először úgy felfogni, hogy x a paraméter – mit tapasztalnak? Aztán válasszák pl z-t paraméternek – mit tapasztalnak?)
6) * Számítsuk ki az alábbi hengeres csavarvonal tetszőleges pontja és a $t_0=0$ paraméterű pontja közé eső darabjának ívhosszát!
   $\underline{r}(t) = a \cdot \cos(t)\underline{i} + a \cdot \sin(t)\underline{j} + b \cdot t\underline{k} \qquad t \in \Re$ és a, b rögzített, valós paraméter
7) Az előző feladatban lehet-e úgy választani a-t és b-t, hogy a görbe paraméterezése ívhossz-paraméterezés legyen? Ha igen, adjon konkrét példát!
8) * Mutassuk meg, hogy az $\underline{r}(s) = \sin(\frac{s}{3}) \cdot \underline{i} + \cos(\frac{s}{3}) \cdot \underline{j} + \frac{\sqrt{8}}{3}s \cdot \underline{k} \qquad s \in \Re$ térgörbe paraméterezése természetes paraméter (ívhossz-paraméter)!
9) * Írjuk fel az xy-síkbeli, origó középpontú, R(>0) sugarú körvonal paraméteres egyenletrendszerét ívhosszparaméterezéssel!
10) * Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények milyen felületeket határoznak meg, és milyen görbék a paramétervonalai (tehát azok a görbék, amiket úgy kapunk, hogy vagy u-t vagy v-t rögzítjük)?
    a) $\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + v\underline{j} + uv\underline{k} \quad u,v \in \Re$
    b) $\underline{r}(u,v) = (u + \sin(v))\underline{i} + (u + \cos(v))\underline{j} + (u + a)\underline{k} \qquad u,v \in \Re$ és „a” rögzített, pozitív, valós szám

A következő két feladatban adott lesz egy felület (paraméteres vektoregyenlet formájában vagy vektormentes alakban) és egy síkgörbe (ami az xy koordinátasíkban fekszik). Ezt a görbét a z tengellyel párhuzamosan a felületre vetítjük. Adjuk meg az így keletkező felületi görbe egy paraméteres vektoregyenletét, és a megadott P_0 pontban a görbéhez húzott érintőegyenes egyenletét!

11) $\mathcal{F}_1$: origó középpontú, 3 sugarú gömbfelület „fölső fele” ($z \geq 0$)

$\mathcal{G}_1$: $y=x^2$ parabola

$P_0(1,1,\sqrt{7})$

12) $\mathcal{F}_2$: $\underline{r}(u,v) = u\underline{i} + v\underline{j} + (u^2 + v^2)\underline{k} \qquad u,v \in \Re$

$\mathcal{G}_2$: a (3;4) középpontú, 1 sugarú körvonal

$P_0(4,4,32)$

A következő feladatokban adott két felület, amelyek metszetgörbéjét (metszetgörbéit) fel kell írni paraméteres vektoregyenlet formájában (mindig adjuk meg a paraméterintervallumot), és ahol meg van adva egy P_0 pont is, ott a görbe ezen pontjában az érintőegyenes egyenletét.

13) $\mathcal{F}_1$: $x^2 + y^2 = \left(\frac{z}{3}\right)^2$

$\mathcal{F}_2$: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

14) $\mathcal{F}_1$: $x^2 + y^2 = \left(\frac{z}{3}\right)^2$

$\mathcal{F}_2$: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$

15) $\mathcal{F}_1$: $x^2 + y^2 = \left(\frac{z}{3}\right)^2$

$\mathcal{F}_2$: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$

16) $\mathcal{F}_1$: $x^2 + y^2 = z$

$\mathcal{F}_2$: $\begin{cases} y^2 + z^2 = 4 \\ x = x \end{cases}$

$P_0(\sqrt{2};0;2)$

Jó munkát!

Halmschlager Andrea