Zárthelyi feladatok megoldásokkal
Matematika M1 terméktervezőknek

Dr. Szabó Szilárd

1. FEJEZET

Valószínűség-számítás

1. 1.ZH, 2015 október 28.

1. Feladat Egy zsákban van 5 fehér, 6 piros és 7 kék golyó. Olyan játékot játszunk, amelynek egy köre abból áll, hogy visszatevés nélkül három golyót kihúzunk a zsákból, megnézzük, majd visszarakjuk őket. Akkor nyerünk az adott körben, ha vagy mind a három golyó különböző színű, vagy mind egyforma. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy két ilyen kör játékban legalább egyszer nyerünk!

Mego.: Összes esetek száma:

$$C_3^{18} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{3 \cdot 2}.$$

Három különböző színű golyót

$$C_1^5 C_1^6 C_1^7 = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$$

féleképpen húzhatunk. Ezért annak valószínűsége, hogy három különböző színű golyót húzunk:

$$\frac{210 \cdot 6}{18 \cdot 17 \cdot 16} = \frac{1260}{4896} = 0,2573...$$

Másrészt, három fehér golyót

$$\frac{C_3^5}{C_3^{18}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{18 \cdot 17 \cdot 16} = \frac{60}{4896} = 0,0122...$$

valószínűséggel, három pirosat

$$\frac{C_3^6}{C_3^{18}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{18 \cdot 17 \cdot 16} = \frac{120}{4896} = 0,0245...$$

valószínűséggel, három kéket pedig

$$\frac{C_3^7}{C_3^{18}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{18 \cdot 17 \cdot 16} = \frac{210}{4896} = 0,0429...$$

valószínűséggel húzunk. Annak a valószínűsége, hogy egy körben nyerünk:

$$p = 0,2573... + 0,0122... + 0,0245... + 0,0429... = 0,3369...$$

Annak a valószínűsége, hogy két körben egyszer sem nyerünk:

$$(1-p)^2 = 0,6631...^2 = 0,4397...$$

Annak a valószínűsége tehát, hogy két körben legalább egyszer nyerünk:

$$1 - 0,4397... = 0,5603...$$

2. Feladat A $[0, 1]$ szakaszon egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint kijelölünk két pontot. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy a két pont közelebb lesz egymáshoz, mint bármelyikük a szakasz akármelyik végpontjához!

Mego.: Jelölje $x \leq y$ a két pontot. Ekkor

$$\Omega = \{(x, y) : \quad 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

az egységnégyzet bal felső fél-háromszöge. A két pont távolsága egymástól $y - x$, a két végponttól pedig x és $1 - y$. A kedvező eseteket leíró egyenlőtlenségek tehát:

$$x \leq y - x \text{ és } 1 - y \leq y - x.$$

Ezek rendre átírhatók a következő alakokba:

$$2x \leq y, \quad \frac{x+1}{2} \leq y$$

A keresett pontok tehát azok az Ω-beli pontok, amelyek ezt a két egyenlőtlenséget teljesítik. Könnyen látszik, hogy ez a taromány egy négyszöget alkot, amely szimmetrikus az $y + x = 1$ egyenesre, és amelynek három csúcspontja $A(1/2, 1), B(1, 1), C(1, 1/2)$. A negyedik D csúcspont meghatározásához az

$$y = 2x \text{ és } y = \frac{x+1}{2}$$

egyenesek metszéspontját kell meghatározni. Egyszerű számolással adódik

$$D(1/3, 2/3).$$

Az $ABCD$ négyszög területe kétszerese az ABD háromszögének, amelynek AB alapja $1/2$, hozzá tartozó magassága pedig $1/3$. Tehát

$$T_{ABC\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12},$$

és a keresett valószínűség:

$$\frac{2T_{ABC\Delta}}{T_\Omega} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

3. Feladat Egy 100 oldal hosszú könyvben 300 hiba található. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy az első oldalon legalább 4 hiba van!

Mego.: Az egy oldalon található hibák száma Poisson-eloszlást követ, amelynek λ paramétere megegyezik a várható-értékével. Az oldalakon található hibák várható-értékeinek összege egy órai tétel értelmében a teljes könyvben található hibák várható értéke, ami a feladat kimondása szerint 300. Ebből $\lambda = 3$. Annak a valószínűsége, hogy az első oldalon legfeljebb 3 hiba van:

$$e^{-3}\left(1 + \frac{3}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{6}\right) = 0,0497...(1 + 3 + 9) = 0,647..$$

Mivel a keresett esemény ennek a komplementere, annak valószínűsége tehát

$$1 - 0,647... = 0,352...$$

4. Feladat Egy malomipari vállalat zacskós lisztet gyárt. A zacskók tömege normális eloszlást követ valamely ismeretlen $m > 0$ várható értékkel és $\sigma > 0$ szórással (mindkét érték grammban van kifejezve). Mérési adatok azt mutatják, hogy a zacskók 96%-ának a tömege legalább $994g$ és 84%-ának legfeljebb $1005g$. Határozzuk meg m-et és σ-t!

Mego.: Legyen ξ egy zacskó liszt tömege, grammban kifejezve. Ekkor a feladat feltétele szerint ξ egy $(m; \sigma)$ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó. Tehát,

$$\eta = \frac{\xi - m}{\sigma}$$

egy standard normális eloszlású valószínűségi változó. A táblázatból kiolvasható, hogy

$$P(\eta \leq -1,75) = 0,04 = P(\xi \leq 994)$$

és

$$P(\eta \leq 1) = 0,84 = P(\xi \leq 1005)$$

Ezért

$$994 = -1,75\sigma + m$$

és

$$1005 = \sigma + m.$$

Ebből az egyenletrendszerből azt kapjuk, hogy

$$m = 1001, \quad \sigma = 4.$$

2. 1. pót-ZH, 2015 december 14.

1. Feladat Két kockát eldobunk egyszerre. Legyen ξ az a valószínűségi változó, amelyet úgy kapunk, hogy a nagyobbik eredményből kivonjuk a kisebbet (amennyiben a két eredmény megegyezik, akkor pedig $\xi = 0$). Számoljuk ki ξ várható értékét és szórását!

Mego.: Számozzuk meg a kockákat 1-től 2-ig, és legyen ξ_1 az első kocka kimenetele, ξ_2 pedig a másodiké. Ekkor nyilván

$$\xi = |\xi_1 - \xi_2|.$$

Határozzuk meg ξ eloszlását:

$$P(\xi = 0) = \frac{6}{36}$$

mert a kedvező esetek száma 6 ($\xi_1 = \xi_2 = j$ valamely $1 \leq j \leq 6$-ra). Különválasztva a $\xi_1 < \xi_2$ és $\xi_2 < \xi_1$ eseteket, hasonlóan beláthatjuk hogy

$$P(\xi = 1) = \frac{10}{36}, P(\xi = 2) = \frac{8}{36}, P(\xi = 3) = \frac{6}{36}, P(\xi = 4) = \frac{4}{36}, \quad P(\xi = 5) = \frac{2}{36}.$$

Ezért

$$E(\xi) = \frac{0 \cdot 6 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{36} = \frac{70}{36}.$$

Másrészt

$$E(\xi^2) = \frac{0 \cdot 6 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 8 + 9 \cdot 6 + 16 \cdot 4 + 25 \cdot 2}{36} = \frac{210}{36},$$

ahonnan

$$D^2(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = \frac{210 \cdot 36 - 70^2}{36^2} = \frac{2660}{1296},$$

végül pedig

$$D(\xi) = \frac{\sqrt{2660}}{36} = \frac{51,57}{36} = 1,43.$$

2. Feladat A $[0,1]^2$ egységnégyzet két függőleges oldalán egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint kijelölünk egy-egy pontot. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy az $(1/4, 1/4)$ pont a két véletlen pontot összekötő szakasz alatt helyezkedik el!

Mego.: Jelöljük t-vel az $x = 0$ oldalon felvett pontot és s-sel az $x = 1$ oldalon felvettet. Ekkor a $(t, 0)$ pontot $(s, 1)$-gyel összekötő egyenes egyenlete

$$y = t + (s - t)x,$$

amelynek $x = 1/4$ feletti pontjának második koordinátája tehát

$$y = \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}s.$$

Legyen az eseménytér

$$\Omega = \{(t, s)\} = [0, 1]^2,$$

ekkor a keresett esemény tehát

$$A = \left\{ (t, s) \in [0, 1]^2 | \quad \frac{3}{4}t + \frac{1}{4}s \geq \frac{1}{4} \right\}.$$

Ezt a feltételt az

$$s \geq 1 - 3t$$

alakba átírva könnyen látható, hogy

$$\Omega \setminus A$$

az a derékszögű háromszög, amelynek egyik befogója az Ω négyzet teljes $t = 0$ oldala, a másik befogója pedig a négyzet $s = 0$ oldalának $0 \leq t \leq 1/3$ része. Vagyis, T-vel jelölve a síkidomok területét, az egyenletes eloszlás definíciója miatt

$$P(\Omega \setminus A) = \frac{T(\Omega \setminus A)}{T(\Omega)} = T(\Omega \setminus A) = \frac{1}{6},$$

ahonnan

$$P(A) = 1 - P(\Omega \setminus A) = \frac{5}{6}.$$

3. Feladat A BME hallgatói közül a BSc-hallgatók aránya 50%, az MSc-seké 35%, az osztatlan képzésben részt vevőké pedig 15%. A BSc-sek 50%-a vidéki, az MSc-seknek 60%-a, az osztatlan képzésben részt vevőknek pedig 40%-a. Mekkora a valószínűsége, hogy egy találomra választott vidéki BME-s hallgató BSc-re illetve annak hogy MSc-re jár?

Mego.: Legyenek B_1, B_2, B_3 azok az események, hogy egy hallgató rendre BSc-s, MSc-s vagy osztatlan képzésben részt vevő. Ekkor

$$P(B_1) = 0,5, \quad P(B_2) = 0,35, \quad P(B_3) = 0,15.$$

Legyen továbbá A az az esemény, hogy egy hallgató vidéki. Ekkor

$$P(A|B_1) = 0,5, \quad P(A|B_2) = 0,6, \quad P(A|B_3) = 0,4.$$

Bayes tétele miatt ekkor tehát

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} \\ &= \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,5 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,35 + 0,4 \times 0,15} = \frac{0,25}{0,52} = 0,4807 \end{aligned}$$

és

$$P(B_2|A) = \frac{0,6 \cdot 0,35}{0,5 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,35 + 0,4 \times 0,15} = \frac{0,21}{0,52} = 0,4038.$$

4. Feladat Egy adott tipusba tartozó izzók véletlen élettartama valamely ismeretlen paraméterű exponenciális eloszlást követ. Tudjuk, hogy az izzók 95%-a 100 óra múlva ég ki. Állapítsuk meg azt az időtartamot, ami alatt az izzók 50%-a kiég.

Mego.: Legyen η a véletlen élettartam. Ha $\lambda > 0$ az eloszlás paramétere, akkor képlet szerint

$$P(\eta > x) = 1 - P(\eta \leq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}.$$

A feladat feltevéséből meghatározzuk λ értékét:

$$e^{-100\lambda} = 0,95,$$

azaz

$$\lambda = -\frac{\ln(0,95)}{100h} = 5,13 \cdot 10^{-4}\frac{1}{h}.$$

Keressük most azt az x_0 értéket, amelyre

$$e^{-\lambda x_0} = 0,5.$$

Ezt az egyenletet x_0-ra megoldva és λ értékét behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$x_0 = -\frac{\ln(0,5)}{5,13 \cdot 10^{-4}}h = 1351h.$$

Tehát 1351 óra alatt fog az izzók 50%-a kiégni.

3. 1. pót-pót-ZH, 2015 december 17.

1. Feladat Egy kockával 100-szor dobunk. Számoljuk ki közelítőleg annak a valószínűségét, hogy a dobott értékek összege 340 és 360 közé esik!

Mego.: Legyen ξ_j a j-edik dobás eredménye, ekkor

$$E(\xi_j) = \frac{7}{2}, D(\xi_j) = \frac{\sqrt{105}}{6}.$$

Legyen

$$\eta = \frac{\sum_{j=1}^{100} \xi_j - 100E(\xi_j)}{\sqrt{100}D(\xi_j)},$$

ekkor η a Centrális Határeloszlás-Tétel értelmében közelítőleg standard normális eloszlást követ. Ezért

$$P\left(340 \leq \sum_{j=1}^{100} \xi_j \leq 360\right) = P\left(\frac{-10}{10D(\xi_j)} \leq \eta \leq \frac{10}{10D(\xi_j)}\right)$$
$$= \Phi(0,5855) - \Phi(-0,5855) = 2\Phi(0,5855) - 1$$
$$= 2 \cdot 0,71904 - 1 = 0,43808.$$

2. Feladat A $[0,1]^2$ egységnégyzet két függőleges oldalán egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint kijelölünk egy-egy pontot. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy a két véletlen pontot összekötő szakasz metszi az $x = 1/3, 1/3 \leq y \leq 2/3$ szakaszt!

Mego.: Jelöljük t-vel az $x = 0$ oldalon felvett pontot és s-sel az $x = 1$ oldalon felvettet. Ekkor a $(t, 0)$ pontot $(s, 1)$-gyel összekötő egyenes egyenlete

$$y = t + (s - t)x,$$

amelynek $x = 1/3$ feletti pontjának második koordinátája tehát

$$y = \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}s.$$

Legyen az eseménytér

$$\Omega = \{(t, s)\} = [0, 1]^2,$$

ekkor a keresett esemény tehát

$$A = \left\{(t, s) \in [0, 1]^2 | \quad \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}s \leq \frac{2}{3}\right\}.$$

Ezeket a feltételeket az

$$1 - 2t \leq s \leq 2 - 2t$$

alakba átírva könnyen látható, hogy A az a parallelogramma, amelynek csúcsai $(1/2, 0), (1, 0), (0, 1), (1/2, 1)$. Vagyis, T-vel jelölve a síkidomok területét, az egyenletes eloszlás definíciója miatt

$$P(A) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = T(A) = \frac{1}{2}.$$

3. Feladat Egy csomag magyar-kártyából (amelyben tehát 4 db. VII-es, stb. , 4 db. felső, 4 db. dáma és 4 db. király található), találomra kihúzunk egy lapot. Ha VII-est húzunk, 10 pontot nyerünk, ha királyt, 5 pontot, ha pedig dámát vagy felsőt, akkor 1 pontot, különben nem nyerünk semennyit és nem is vesztünk. Számoljuk ki a nyereményünk várható összegét és szórását!

Mego.: Legyen ξ a nyereményünk, ekkor

$$P(\xi = 10) = \frac{1}{8} = P(\xi = 5), P(\xi = 1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Innen

$$E(\xi) = \frac{1}{8}10 + \frac{1}{8}5 + \frac{1}{4}1 = \frac{17}{8}$$

és

$$E(\xi^2) = \frac{1}{8}100 + \frac{1}{8}25 + \frac{1}{4}1 = \frac{127}{8}.$$

Tehát

$$D^2(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = \frac{1016 - 289}{64} = \frac{727}{64} = 11,36$$

és

$$D(\xi) = 3,37.$$

4. Feladat Egy telefonközpontba percenként beérkező hívások száma valamely ismeretlen λ paraméterű Poisson-eloszlást követ. Tudjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 1 hívás érkezik, $2e^{-1}$. Legyen A az az esemény, hogy pontosan 1 hívás érkezik és B az az esemény, hogy legalább 2 hívás érkezik. Állapítsuk meg, hogy A vagy B valószínűsége-e a nagyobb!

Mego.: Legyen ξ a beérkező hívások száma. Ekkor a Poisson-eloszlás képlete alapján

$$P(\xi \leq 1) = e^{-\lambda}(1 + \lambda).$$

Másrészt, tudjuk hogy

$$P(\xi \leq 1) = 2e^{-1}.$$

Ezekből $\lambda = 1$, tehát

$$P(B) = 1 - P(\xi \leq 1) = 1 - 2e^{-1}, P(A) = e^{-1}.$$

Minthogy $e < 3$, tudjuk hogy $1 < 3e^{-1}$, azaz

$$P(B) = 1 - 2e^{-1} < e^{-1} = P(A).$$

4. 1. ZH, 2016 október 12.

1. Feladat Legyen p_1 a következő esemény valószínűsége: ha azt a kísérletet, hogy egyszerre két kockával dobunk, egymás után kétszer megismételjük, akkor a két alkalomból legalább egyszer 10 lesz a két dobott szám összege. Legyen p_2 annak a valószínűsége, hogy ha egyszerre három kockával dobunk, akkor 10 lesz a három dobott szám összege. Melyik szám a nagyobb: p_1 vagy p_2 ?

Mego.: Számoljuk ki először p_1-et a komplementer-esemény valószínűségéből! Különböztessük meg a két kockát, például az egyiket a bal kezünkkel dobva, a másikat a jobbal, és ilyen sorendben írjuk egymás mellé a dobott számokat. Ekkor, egy alkalommal dobva két kockával, a kedvező esetek kimenetelei:

$$(4,6) \quad (5,5) \quad (6,4),$$

így annak a valószínűsége, hogy 10 a két dobott szám összege,

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Annak a valószínűsége, hogy nem 10 a két dobott szám összege, tehát

$$\frac{11}{12}.$$

Ha most egymás után kétszer dobunk két kockával, akkor annak a valószínűsége, hogy egyszer sem 10 a két dobott szám összege:

$$\left(\frac{11}{12}\right)^2 = \frac{121}{144}.$$

Tehát, annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer 10 a két dobott szám összege:

$$p_1 = 1 - \frac{121}{144} = \frac{23}{144} = 0,1597...$$

Határozzuk meg most p_2-t! Megint megkülönböztetjük a három kockát és egymás után írjuk a dobott számokat. Ekkor, a kedvező esetek:

$$(1,3,6), (1,4,5), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4), (2,2,6)$$

valamint ezen kimenetelek tetszőleges permutációi. Az első három kimenetelnek egyenként $3! = 6$ permutációja van, az utolsó háromban azonban egyik szám ismétlődik, ami miatt ezeknek egyenként csak $3!/2! = 3$ különböző permutációjuk van. Tehát, a kedvező esetek száma:

$$3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 27,$$

míg összesen 6^3 eset van. Ebből jön, hogy

$$p_2 = \frac{27}{6^3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6},$$

ahonnan pedig

$$p_2 < p_1.$$

2. Feladat Egy almakertben minden 3. alma ütődött és minden 10. férges. Az ütődöttek közül minden 8. férges. Milyen aránya férges azoknak az almáknak, amelyek nem ütődöttek?

Mego.: Legyen U az az esemény, hogy egy találomra kiválasztott alma ütődött és F az, hogy férges. Ekkor a feladat szövege szerint:

$$P(U) = \frac{1}{3}, \quad P(F) = \frac{1}{10}, \quad P(F|U) = \frac{1}{8}.$$

A teljes valószínűség tétele értelmében

$$P(F) = P(F|U)P(U) + P(F|\bar{U})P(\bar{U}),$$

ahonnan átrendezéssel

$$P(F|\bar{U}) = \frac{P(F) - P(F|U)P(U)}{P(\bar{U})} = \frac{\frac{1}{10} - \frac{1}{24}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{80}.$$

3. Feladat A $[0,2]$ szakaszon egyenletes eloszlással kijelölünk egy véletlen pontot. Számoljuk ki ennek a pontnak a $0,5$ ponttól való távolságának várható értékét!

Mego.: Legyen ξ a kijelölt pont helye, és η az a valószínűségi változó, amely ξ-nek a $0,5$ ponttól való távolságát méri. Ekkor

$$P(\eta \leq x) = P\left(\xi \in \left[\frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} + x\right]\right),$$

aminek értéke:

$$\begin{aligned} 0 \quad & \text{ha } x \leq 0 \\ x \quad & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + x\right) \quad & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 1 \quad & \text{ha } \frac{3}{2} \leq x. \end{aligned}$$

Innen azt kapjuk, hogy η sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} f_\eta(x) =& 0 \quad \text{ha } x \notin [0, 3/2] \\ f_\eta(x) =& 1 \quad \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f_\eta(x) =& \frac{1}{2} \quad \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ezekből η várható értéke:

$$\begin{aligned} E(\eta) &= \int_0^{1/2} x \mathrm{d}x + \int_{1/2}^{3/2} \frac{x}{2} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8} + \frac{9-1}{16} \\ &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

4. Feladat Egy telefonközpontba átlagosan percenként két hívás érkezik be. Mi a valószínűbb: hogy egy perc alatt legalább három hívás érkezik, vagy hogy két perc alatt legalább öt?

Mego.: Könnyebb a komplementer-események valószínűségét számolni. Az adott időtartam alatt érkező hívások száma Poisson-eloszlást követ, amelynek paramétere egyenesen arányos az időtartam hosszával, és a feladat kimondása valamint a paraméter és a várható érték egyezése miatt 1 percre a paraméter 2.

Ha A az elsőként bevezetett esemény és B a másodikként, akkor tehát

$$P(\bar{A}) = e^{-2}\left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right) = 5e^{-2} = 0,67667...$$

és

$$P(\bar{B}) = e^{-4}\left(1 + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!}\right) = 0,62883...$$

ahonnan

$$P(\bar{A}) > P(\bar{B}),$$

azaz

$$P(A) < P(B).$$

5. 1. pót-ZH, 2016 november 30.

1. Feladat Egy zsákban van 8 piros és 5 fehér golyó (több golyó nincs benne). Kétszer egymás után húzunk a zsákból, visszatevés nélkül. Amennyiben legalább egy fehér golyó van a kihúzott két golyó között, úgy dobunk egy kockával. Legyen ekkor ξ a dobott szám; amennyiben nem volt fehér golyó a kihúzott golyók között, akkor pedig legyen $\xi = 0$. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó várható értékét és szórását!

Mego.: A visszatevés nélküli húzásnál az összes eset száma:

$$\binom{13}{2},$$

az olyan esetek száma pedig, amikor nem húzunk egyetlen fehéret sem (azaz, mindkét golyót a 8 piros közül húzzuk):

$$\binom{8}{2}.$$

Emiatt

$$P(\xi = 0) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{8 \cdot 7}{13 \cdot 12} = 0,359.$$

Jelöljük ezt az értéket p-vel. Annak a valószínűsége, hogy legalább egy fehéret húzunk: $1 - p$. Tehát, ha $1 \le j \le 6$ akkor

$$P(\xi = j) = \frac{1-p}{6},$$

ahonnan

$$E(\xi) = \frac{1-p}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21-21p}{6} = 2,2435.$$

Másrészt,

$$E(\xi^2) = \frac{1-p}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91-91p}{6} = 9,7218,$$

így

$$D(\xi) = \sqrt{9,7218 - 2,2435^2} = \sqrt{9,7218 - 5,0333} = \sqrt{4,6885} = 2,1653.$$

2. Feladat Egy botot egyenletes eloszlás szerint három részre osztunk. Mi a valószínűsége, hogy a kapott három rész közül a középső a leghosszabb?

Mego.: Vegyük a botot a $[0,1]$ egység-intervallumnak és jelöljük az osztópontokat $x < y$-nal. Az eseménytér ekkor

$$\Omega = \{(x,y) | \quad 0 < x < y < 1\}$$

az egységnégyzet bal felső fele. Azokat az osztásokat, amikor a középső részintervallum a leghosszabb, az

$$A = \{(x,y) | \quad y - x > x, \quad y - x > 1 - y\} \subset \Omega$$

részhalmaz paraméterezi. Ábrázolva ezen tartományt, látjuk hogy egy tengelyesen szimmetrikus négyszög, amelynek három csúcsa:

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}.$$

A negyedik csúcs meghatározásához oldjuk meg a

$$\begin{aligned}-2x + y &= 0\\ x - 2y &= -1\end{aligned}$$

egyenletrendszert. Azt találjuk, hogy a megoldás: $x = 1/3, y = 2/3$. Az A alakzatot az $y = 1 - x$ egyenes két egybevágó háromszögre bontja, melyek tengelyekkel párhuzamos alapja $1/2$, magassága pedig $1/3$ hosszú. Ebből,

$$T(A) = \frac{1}{6},$$

a keresett valószínűség pedig

$$\frac{T(A)}{T(\Omega)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

3. Feladat Legyenek ξ, η független Poisson-eloszlású valószínűségi változók, rendre $\lambda, \mu > 0$ paraméterekkel. Mutassuk meg, hogy ekkor $\xi + \eta$ is Poisson-eloszlású változó, mégpedig $\lambda + \mu$ paraméterrel!

Mego.: Tudjuk, hogy minden $k \geq 0$ esetén

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad P(\eta = k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}$$

A változók függetlensége miatt annak a valószínűsége, hogy ξ valamely l értéket vegyen fel, η pedig valamely m értéket:

$$P(\xi = l, \eta = m) = P(\xi = l)P(\eta = m) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\mu}\frac{\mu^m}{m!}$$

Vegyük észre, hogy $\xi+\eta$ akkor és csak akkor vesz fel valamely k értéket, ha ξ valamely $0 \leq l \leq k$ értéket vesz fel és η a $m = k - l$ értéket veszi fel, ráadásul ezek az esetek kölcsönösen kizárják egymást. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}P(\xi + \eta = k) &= \sum_{l=0}^{k} P(\xi = l, \eta = k - l)\\ &= \sum_{l=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\mu}\frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!}\\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\lambda^l\mu^{k-l}\\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}(\lambda+\mu)^k.\end{aligned}$$

4. Feladat Az urán 232-es izotópjának 100%-os tisztaságú mintájából 22,31 év alatt tapasztalat alapján 20% bomlik le. Állapítsuk meg az adott izotóp felezési idejét!

Mego.: Legyen η a lebomlott atomok aránya. Ekkor η exponenciális eloszlást követ valamely $\lambda > 0$ paraméterrel:

$$P(\eta < T) = 1 - e^{-T\lambda}.$$

Tudjuk, hogy

$$1 - e^{-22,31\lambda} = 0,2,$$

innen meghatározható

$$\lambda = -\frac{\ln(0,8)}{22,31} = 0,01.$$

A felezési idő az a T_0 érték, amelyre

$$1 - e^{-T_0\lambda} = 0,5.$$

Ebből

$$T_0 = \frac{\ln(2)}{0,01} = 69 \text{ év}.$$

6. 1. pót-pót-ZH, 2016 december 14.

1. Feladat Egy kockával kétszer egymás után dobunk. Amennyiben legalább egy 6-ost dobunk, úgy feldobunk egy szabályos érmét. Fej dobás esetén kapunk 100 Ft-ot, különben vesztünk 50 Ft-ot. Ha nem dobunk a kockával egy 6-ost sem, akkor nem nyerünk és nem is vesztünk semennyit. Határozzuk meg a nyereményünk várható értékét és szórását!

Mego.: Annak a valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk 6-ost: $(\frac{5}{6})^2$. Jelölje ξ a nyereményünket. Ekkor

$$P(\xi = 0) = \frac{25}{36}, \quad P(\xi = 100) = P(\xi = -50) = \frac{11}{36} \cdot \frac{1}{2}.$$

Innen:

$$E(\xi) = \frac{11}{36} \cdot \frac{1}{2}(100 - 50) = \frac{11 \cdot 25}{36} = 7,63,$$

továbbá

$$E(\xi^2) = \frac{11}{72}(10000 - 2500) = \frac{11}{72} \cdot 7500 = 1145,8$$

A szórás pedig:

$$D(\xi) = \sqrt{E(\xi^2) - E(\xi)^2} = \sqrt{1087,6} = 32,98.$$

2. Feladat Egy botot egyenletes eloszlás szerint három részre osztunk. Mi a valószínűsége, hogy a kapott három rész közül a bal oldali a legrövidebbik, a középső a leghosszabbik, de a középső legfeljebb kétszer olyan hosszú, mint a bal oldali?

Mego.: Jelöljük az osztópontokat $x < y$-nal. Az eseménytér

$$\Omega = \{(x, y)| \quad 0 < x < y < 1\}$$

az egységnégyzet bal felső fele. A kedvező eseményeket ekkor az

$$A = \{(x, y)| \quad x < 1 - y < y - x < 2x\}$$

halmaz tartalmazza. Az A halmaz egy háromszög, melynek csúcsai:

$$C_1(1/5,\ 3/5), \quad C_2(1/3,\ 2/3), \quad C_3(1/4,\ 3/4).$$

A C_1-ből C_2-be mutató vektor:

$$\vec{C_1C_2} = (2/15,\ 1/15),$$

a C_1-ből C_3-ba mutató vektor pedig:

$$\vec{C_1C_3} = (1/20,\ 3/20).$$

Innen

$$\langle \vec{C_1C_2}, \vec{C_1C_3} \rangle = \frac{1}{60},$$

ahonnan

$$P(A) = \frac{T(A)}{T(\Omega)} = \frac{1}{60}.$$

3. Feladat Tavaly a magyar felnőttek 20%-a oltatta be magát influenza ellen. Akik beoltatták magukat, azoknak 10%-a kapta el a fertőzést, akik nem oltatták be magukat, azoknak pedig 40%-a. Mi a valószínűsége, hogy egy olyan felnőtt, aki nem kapta el az adott évben a betegséget, beoltatta magát?

Mego.: Legyen Ω a magyar felnőttek halmaza, és jelölje I azt az eseményt, hogy egy találomra választott felnőtt elkapta a betegséget, valamint V azt az eseményt, hogy beadatta magának a védőoltást. A feladat szövege alapján

$$P(V) = 0,2, \quad P(I|V) = 0,1, \quad P(I|\bar{V}) = 0,4.$$

Ezekből:

$$P(\bar{V}) = 0,8, \quad P(\bar{I}|V) = 0,9, \quad P(\bar{I}|\bar{V}) = 0,6.$$

A Bayes-tétel miatt tehát:

$$\begin{aligned} P(V|\bar{I}) &= \frac{P(\bar{I}|V)P(V)}{P(\bar{I}|V)P(V)+P(\bar{I}|\bar{V})P(\bar{V})} \\ &= \frac{0,9\cdot 0,2}{0,9\cdot 0,2+0,6\cdot 0,8} \\ &= \frac{0,18}{0,18+0,48} = 0,2727... \end{aligned}$$

4. Feladat Az urán 233-as izotópjának felezési ideje 160 ezer év. Mennyi idő alatt bomlik le 100%-os tisztaságú 233-as uránérc 10%-a?

Mego.: Legyen η a lebomlott atomok aránya. Ekkor η exponenciális eloszlást követ valamely $\lambda > 0$ paraméterrel:

$$P(\eta < T) = 1 - e^{-T\lambda}.$$

Ismert, hogy

$$P(\eta < 160000) = \frac{1}{2},$$

ahonnan azt kapjuk hogy

$$\lambda = -\frac{\ln(2)}{160000} = 4,33\cdot 10^{-6}.$$

Legyen T_1 a keresett időtartam, évben mérve. Ekkor:

$$1 - e^{-T_1\lambda} = 0,1$$

amit átrendezve:

$$T_1 = -\frac{\ln(0,9)}{\lambda} = 24320,5.$$

7. 1. Vizsga, 2016 december 20.

1. Feladat Egy húsz méter sugarú, kör alakú erdőben kizárólag tíz cm. átmérőjű, egyenes törzsű, gallyak nélküli fák nőnek rendszertelenül, átlagban négyzetméterenként egy. A kör közepén állva csukott szemmel választott irányban íjunkkal kilövünk egy elhanyagolható átmérőjű nyílvesszőt. Tegyük fel, hogy a lövésünk pontosan akkor nem jut ki az erdőből, ha eltalál (vagy akár csak érint is) legalább egy fatörzset. Számoljuk ki közelítőleg annak a valószínűségét, hogy a nyílvessző kijut az erdőből!

Mego.: Ha a fatörzsek középpontjait tekintjük, feltehető hogy az x négyzetméterre eső fák száma x paraméterű Poisson-eloszlást mutat. A nyílvessző akkor és csak akkor talál el legalább egy fát, ha a nyílvessző útja melletti szimmetrikus $10cm$ szélességű téglalapba egy fa sem esik. Ennek a téglalapnak a területe: $20m \times 10cm = 2m^2$, tehát a keresett valószínűség:

$$e^{-2}\frac{2^0}{0!} = e^{-2}.$$

2. Feladat Egy kockával dobunk egymás után 10000-szer. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a dobott 1-esek száma 1600 és 1700 közé esik!

Mego.: A dobott 1-esek számát jelölje ξ, ekkor

$$E(\xi) = \frac{10000}{6} = 1667, \quad D(\xi) = \sqrt{10000\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}} = 37,27.$$

Vezessük be az

$$\eta = \frac{\xi - 1667}{37,27}$$

valószínűségi változót; ekkor η közelítőleg standard normális. Továbbá:

$$a = \frac{1600-1667}{37,27} = -1,7976 \quad b = \frac{1700-1667}{37,27} = 0,8854.$$

Innen a keresett valószínűség:

$$P(a \le \eta < b) = \Phi(b) - \Phi(a) = 0,810 - 0,036 = 0,774.$$

8. 2. Vizsga, 2017 január 10.

1. Feladat Egy buszjáraton egy adott időszakban a buszonként utazó utasok száma 10 paraméterű Poisson-eloszlást követ. A közlekedési társaság elhatározza, hogy megvizsgál az adott időszakban 10 buszt, és amennyiben ezek közül legalább egyiken kevesebben utaznak 5-nél, akkor járatritkítást rendel el (különben pedig nem). Mi a valószínűsége a járatritkításnak?

Mego.: Legyen ξ az egy buszon utazó utasok száma. Ekkor

$$P(\xi < 5) = e^{-10}\left(1 + 10 + \frac{100}{2} + \frac{1000}{6} + \frac{10000}{24}\right) = 4,54 \times 10^{-5} \times 645 = 0,029.$$

Jelöljük ezt a mennyiséget p-vel. Annak a valószínűsége, hogy egy buszon legalább öten utaznak, $1-p = 0,971$. Annak a valószínűsége, hogy a tíz busz mindegyikén legalább öten utaznak:

$$(1-p)^{10} = 0,745.$$

A keresett esemény ennek komplementere, így a valószínűsége:

$$1 - 0,745 = 0,255.$$

2. Feladat Egy adott izzótipusból 10000 óra alatt az izzók harmada ég ki. Határozzuk meg közelítőleg annak a valószínűségét, hogy 3000 izzó közül ennyi idő alatt 975 és 1050 közötti számú ég ki!

Mego.: Jelöljük ξ-vel a kiégett izzók számát. Ekkor

$$E(\xi) = 3000 \times \frac{1}{3} = 1000, \quad D(\xi) = \sqrt{3000 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = 25,81.$$

Legyen

$$\eta = \frac{\xi - 1000}{25,81},$$

ekkor η közelítőleg standard normális. Továbbá,

$$975 < \xi < 1050$$

pontosan akkor teljesül, amikor

$$\frac{975 - 1000}{25,81} < \eta < \frac{1050 - 1000}{25,81},$$

azaz amikor

$$-0,97 < \eta < 1,94.$$

Ennek a valószínűsége közelítőleg

$$\Phi(1,94) - \Phi(-0,97) = 0,97381 - 0,16602 = 0,80779.$$

9. 3. Vizsga, 2017 január 17.

1. Feladat Egy adott tipusú izzó átlagos élettartama 4000 óra. A gyártó cég N darabot elkezd égetni. Hogy kell megválasztani N-et úgy, hogy 90% valószínűséggel az N-es minta átlag élettartama 3500 óra vagy annál hosszabb legyen?

Mego.: Az i-edik izzó (ahol $1 \le i \le N$) ξ_i élettartama exponenciális eloszlást követ, $\lambda = \frac{1}{4000}$ paraméterrel. Ennek várható értéke és szórása is 4000. A minta átlag élettartama:

$$\eta = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_N}{N}$$

elég nagy N érték esetén megközelítőleg normális eloszlást követ,

$$E(\eta) = \frac{NE(\xi)}{N} = 4000$$

várható értékkel és

$$D(\eta) = \frac{\sqrt{N}D(\xi_i)}{N} = \frac{4000}{\sqrt{N}}$$

szórással. Emiatt

$$\zeta = \sqrt{N}\frac{\eta - 4000}{4000}$$

megközelítőleg standard normális eloszlást követ. Tehát

$$P(\eta \leq 3500) = P\left(\zeta \leq -\frac{500}{4000}\sqrt{N}\right)$$

ami feltétel szerint $0,1$. Ebből a standard normális eloszlás táblázata segítségével:

$$-\frac{500}{4000}\sqrt{N} = -1,28$$

ahonnan pedig

$$\sqrt{N} = 10,24$$

és $N = 105$ a megoldás.

10. 1. ZH, 2017 október 18.

1. Feladat Egy étteremben a vendégek a száz szabad ülőhely közül egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint választják ki a helyüket. Egyszerre negyvenen érkeznek, és foglalnak helyet. Mi a valószínűbb:

(i) hogy egy találomra kiválasztott kétfős asztalhoz legfeljebb egy vendég jusson,
(ii) vagy hogy egy találomra kiválasztott hatfős asztalhoz legfeljebb három?

Mego.: A. valószínűségének kiszámolása a hipergeometrikus eloszlás szerint történik, $N = 100, M = 2, n = 40$ paraméterekkel. A képlet alapján:

$$P(A) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{98}{39} + \binom{2}{0}\cdot\binom{98}{40}}{\binom{100}{40}} = \frac{2\cdot 40\cdot 60 + 60\cdot 59}{100\cdot 99} = 0,84.$$

Hasonlóan, $P(B)$ elvileg $N = 100, M = 6, n = 40$ paraméterű hipergeometrikus eloszlással számolható, ez azonban viszonylag nagy számokkal való számolást igényel. Mivel N értéke M-hez képest elég nagy, azért $P(B)$ jól közelíthető $p = 0,4$ paraméterű ismétléses variációval, azaz binomiális eloszlással:

$$\begin{aligned} P(B) &= \binom{6}{0}\cdot 0,6^6 + \binom{6}{1}\cdot 0,6^5\cdot 0,4 + \binom{6}{2}\cdot 0,6^4\cdot 0,4^2 + \binom{6}{3}\cdot 0,6^3\cdot 0,4^3 \\ &= 0,046 + 0,186 + 0,311 + 0,276 = 0,819. \end{aligned}$$

Ezek szerint

$$P(A) > P(B).$$

2. Feladat Egy egység hosszú szakaszon egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint kijelölünk két pontot. Mi a valószínűsége, hogy a pontok egymástól $0,2$-nél kisebb, de $0,1$-nél nagyobb távolságra lesznek?

Mego.: Jelöljük a kiválasztott pontokat x-szel és y-nal. Ekkor az eseménytér

$$\Omega = [0,1]\times[0,1].$$

Ebben a kedvező esetek az

$$0,1 < |x-y| < 0,2$$

egyenlőtlenségeket teljesítő A halmaz pontjai. Legyen

$$S_2 = \{(x,y)\in\Omega| \quad |x-y| < 0,2\}$$

és

$$S_1 = \{(x,y)\in\Omega| \quad |x-y| < 0,1\}$$

E hamlazok pontjainak mértani helye a négyzet átlójára szimmetrikusan elhelyezkedő egy-egy sáv: S_2 a négyzet peremét a

$$(0,2;0), (1;0,8), (0,8;1), (0;0,2)$$

pontokban metszi. Ekkor $\Omega\backslash S_2$ nyilván két egymással egybevágó, $0,8$ oldalhosszúságú derékszögű egyenlőszárú háromszög, tehát területük összege

$$0,8^2 = 0,64.$$

Ezért, annak valószínűsége, hogy a két pont egymástól legfeljebb $0,2$ távolságra esik:

$$1 - 0,64 = 0,36.$$

Hasonlóan látjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a két pont egymástól legfeljebb $0,1$ távolságra esik:

$$1 - 0,9^2 = 0,19.$$

Ezért, a keresett esemény valószínűsége:

$$0,36 - 0,19 = 0,17.$$

3. Feladat A krétaiak 50%-a hazudós, ami azt jelenti, hogy minden kérdésre hamis választ adnak, 30%-uk tréfás kedvű, azaz egyenlő eséllyel ad igaz és hamis választ, a maradék 20%-uk pedig igazmondó, akik mindig igazat mondanak. Találkozunk egy krétaival, és kérdezünk tőle valamit, amire ismerjük a helyes választ. Mi a valószínűsége, hogy tréfás kedvűvel találkoztunk, ha a válasz igaz? Hát ha hamis?

Mego.: Legyenek H, T, I rendre azon események, hogy a kiválasztott krétai hazudós, tréfás kedvű illetve igazmondó. Tudjuk, hogy

$$P(H) = 0,5 \quad P(T) = 0,3 \quad P(I) = 0,2.$$

Legyen továbbá A az az esemény, hogy helyes választ kapunk. Ekkor tudjuk azt is, hogy

$$P(A|H) = 0 \quad P(A|T) = 0,5 \quad P(A|I) = 1.$$

Bayes tétele alapján:

$$\begin{aligned} P(T|A) &= \frac{P(A|T)P(T)}{P(A|T)P(T) + P(A|I)P(I) + P(A|H)P(H)} \\ &= \frac{0,5 \times 0,3}{0,5 \times 0,3 + 0,2 + 0} \\ &= \frac{3}{7}, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} P(T|\bar{A}) &= \frac{P(\bar{A}|T)P(T)}{P(\bar{A}|T)P(T) + P(\bar{A}|I)P(I) + P(\bar{A}|H)P(H)} \\ &= \frac{0,5 \times 0,3}{0,5 \times 0,3 + 0 + 0,5} \\ &= \frac{3}{13}. \end{aligned}$$

4. Feladat Legyen ξ egy λ-paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, és

$$\eta = (-1)^\xi \xi.$$

Határozzuk meg η várható értékét!

Mego.: Definíció szerint minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$P(\eta = (-1)^k k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

ahonnan

$$\begin{aligned} E(\eta) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= -e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= -e^{-\lambda} \lambda \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\lambda^l}{l!} \\ &= -e^{-\lambda} \lambda e^{-\lambda} \\ &= -e^{-2\lambda} \lambda. \end{aligned}$$

11. 1. pót-ZH, 2017 november 29.

1. Feladat Az egységszakaszon egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint kiválasztunk két számot. Független-e a következő két esemény?

(i) A nagyobbik szám legalább $0,5$.

(ii) A nagyobbik szám legalább kétszer akkora, mint a kisebbik.

Mego.: Az eseménytér

$$\Omega = \{(x, y) : \quad 0 \le x \le y \le 1\}, \quad T(\Omega) = \frac{1}{2}.$$

Az A eseményt Ω-ban a

$$y \ge \frac{1}{2},$$

a B-t a

$$y \ge 2x$$

egyenlőtlenség definiálja. Látjuk, hogy A egy trapéz,

$$\left(0, \frac{1}{2}\right), \ (0,1), \ (1,1), \ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

csúcspontokkal, tehát területe

$$T(A) = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

A B tartomány pedig a

$$(0,0), \ (0,1), \ \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

csúcsú háromszög, így

$$T(B) = \frac{1}{4}.$$

Végül, $A \cap B$ egy trapéz,

$$\left(0, \frac{1}{2}\right), \ (0,1), \ \left(\frac{1}{2}, 1\right), \ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

csúcspontokkal, tehát

$$T(A \cap B) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}.$$

Ezekből:

$$P(A) = \frac{3}{4}$$
$$P(B) = \frac{1}{2}$$
$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}.$$

Minthogy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

a két esemény független.

2. Feladat Nagyanyó mazsolás kalácsot süt az unokáinak: Annának és Balázsnak. Egy kilogramm kész süteményhez felhasznál 20 szem mazsolát. Mindketten egy-egy 50 grammos szeletet vesznek belőle. Anna nem szereti a mazsolát, annak örülne, ha egy szem sem lenne a szeletében, Balázs pedig annak, ha legalább két szem lenne az övében. Kinek teljesül nagyobb valószínűséggel a kívánsága?

Mego.: A szeletekben levő mazsolák ξ száma egy

$$\lambda = 1$$

paraméterű Poisson-eloszlást követ. Legyen A az az esemény, hogy egy szeletben egy szem sincs, ekkor:

$$P(A) = P(\xi = 0) = e^{-1} = 0,3679.$$

Másrészt,

$$P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi \leq 1) = 1 - 2e^{-1} = 0,2642,$$

ezért Anna kap nagyobb eséllyel neki megfelelő szeletet.

3. Feladat Egy kockadobást addig folytatunk, amíg 1-estől különböző értéket nem dobunk. Ha ez a k-adik dobásnál következik be, akkor kapunk 2^k pontot. Legyen ξ a nyereményünk összege. Határozzuk meg ξ várható értékét és szórását!

Mego.: A negatív binomiális eloszlás képlete alapján

$$P(\xi = 2^k) = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1},$$

ezért

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \\ &= \frac{5}{3} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Hasonlóan,

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \\ &= \frac{10}{3} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 10. \end{aligned}$$

Innen:

$$D(\xi) = \sqrt{E(\xi^2) - E^2(\xi)} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

4. Feladat Egy 1 méter átmérőjű, kör alakú céltáblára íjjal leadunk 100 lövést. Feltesszük, hogy minden lövésünk eltalálja a céltáblát, és azon belül egyenletes eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább 20-szor, de legfeljebb 35-ször találjuk el a tábla közepén elhelyezkedő fél méter átmérőjű körlapot?

Mego.: A kisebb körlap területének az aránya a nagyobbikéhoz $1/4$. Ha A-val jelöljük azt az eseményt, hogy egy lövésnél eltaláljuk a kisebb korongot, akkor tehát az egyenletes eloszlás miatt $p = P(A) = 1/4$. Legyen ξ_{100} az a valószínűségi változó, amely értéke egyenlő A bekövetkezéseinek számával $n = 100$ lövés során. Ekkor

$$E(\xi_{100}) = 100p = 25, \quad D(\xi_{100}) = \sqrt{100 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2} = 4,33.$$

Ezért, a

$$\eta = \frac{\xi_{100} - 25}{4,33}$$

közelítőleg standard normális eloszlású. Innen,

$$\begin{aligned} P\left(20 \leq \xi_{100} < 35\right) &= P\left(\frac{20-25}{4,33} \leq \eta < \frac{35-25}{4,33}\right) \\ &= P\left(-1,15 \leq \eta < 2,31\right) \\ &= \Phi(2,31) + \Phi(1,15) - 1 \\ &= 0,864. \end{aligned}$$

12. 1. pót-pót-ZH, 2017 december 13.

1. Feladat Egy egységsugarú körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Határozzuk meg a választott pont középponttól való távolságának várható értékét és szórását!

Mego.: Az eseménytér polárkoordinátákban

$$\Omega = \{(r, \theta) \in [0,1] \times [0, 2\pi]\}, \quad T(\Omega) = \pi.$$

A normált területi forma $\frac{r}{\pi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. Innen

$$\begin{aligned}
E(r) &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 r^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}, \\
E(r^2) &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 r^3 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}, \\
D^2(r) &= E(r^2) - E^2(r) = \frac{1}{18}, \\
D(r) &= \frac{1}{3\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

2. Feladat Egy szabályos dobókockát addig dobunk fel, amíg legalább egy 1-est és legalább egy 6-ost dobunk. Jelölje ξ azt a változót, amely k-val egyenlő ha az első 1-est a k-adik dobásnál dobtuk, továbbá η azt a változót, amely l-lel egyenlő ha az első 6-ost az l-edik dobásnál dobtuk. Függetlenek-e ξ és η?

Mego.: Mivel

$$P(\xi = k, \eta = k) = 0$$

és

$$P(\xi = k) = P(\eta = k) \neq 0,$$

azért

$$P(\xi = k, \eta = k) \neq P(\xi = k)P(\eta = k).$$

Tehát, a változók nem függetlenek.

3. Feladat Az uránium 238-as izotópjának felezési ideje nagyjából $4,5$ milliárd év. Egy mintájában azt találjuk, hogy az atomok harmada van lebomolva. Milyen idős a minta?

Mego.: Egy atom lebomlásának ideje exponenciális eloszlást követ:

$$P(\xi < t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Tudjuk, hogy

$$P(\xi < 4,5 \cdot 10^9) = \frac{1}{2}.$$

Innen:

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{4,5 \cdot 10^9} = 1,54 \cdot 10^{-10}.$$

Legyen a keresett kor (évben kifejezve) t_0. A feladat szövege alapján:

$$1 - e^{-\lambda t_0} = \frac{1}{3},$$

ahonnan

$$t_0 = \frac{\ln(3) - \ln(2)}{1,54 \cdot 10^{-10}} = 2,63 \cdot 10^9.$$

4. Feladat Egy 1 méter átmérőjű, kör alakú céltáblára íjjal leadunk 1000 lövést. Feltesszük, hogy minden lövésünk eltalálja a céltáblát, és azon belül egyenletes eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább 55-ször eltaláljuk a tábla közepén elhelyezkedő negyed méter átmérőjű körlapot?

Mego.: A kisebb körlap területének az aránya a nagyobbikéhoz $1/16$. Ha A-val jelöljük azt az eseményt, hogy egy lövésnél eltaláljuk a kisebb korongot, akkor tehát az egyenletes eloszlás miatt $p = P(A) = 1/16$. Legyen ξ_{1000} az a valószínűségi változó, amely értéke egyenlő A bekövetkezéseinek számával $n = 1000$ lövés során. Ekkor

$$E(\xi_{1000}) = 1000p = 62,5 \quad D(\xi_{1000}) = \sqrt{1000 \cdot \frac{15}{16^2}} = 7,65.$$

Ezért, a

$$\eta = \frac{\xi_{1000} - 62,5}{7,65}$$

közelítőleg standard normális eloszlású. Innen,

$$\begin{aligned} P(55 \leq \xi_{1000}) &= P\left(\frac{55 - 62,5}{7,65} \leq \eta\right) \\ &= P(-0,98 \leq \eta) \\ &= P(\eta \leq 0,98) \\ &= 0,8365. \end{aligned}$$

13. 1. Vizsga, 2017 december 20.

1. Feladat Egy napi 8 órában dolgozó telefonos ügyintéző átlagosan kétpercenként kap egy bejövő hívást. A főnöke minden órában egy percet az ügyintéző mellett tölt. Mi a valószínűsége, hogy egy napon legalább két hívás érkezik a főnök jelenlétében, feltéve hogy ezalatt legalább egy hívás érkezik?

Mego.: A főnök naponta összesen 8 percet tölt a beosztott mellett, aki tehát ezalatt átlagosan 4 hívást kap. A hívások ξ száma Poisson-eloszlású valószínűségi változó, $\lambda = 4$ paraméterrel:

$$P(\xi = k) = e^{-4}\frac{4^k}{k!}$$

Legyen A az az esemény, hogy legalább két hívás érkezik a főnök jelenlétében, B pedig az az esemény, hogy legalább egy hívás érkezik a főnök jelenlétében. Ekkor nyilván $A \subset B$, tehát

$$A \cap B = A.$$

A komplementer-eseményekkel számolva, azt kapjuk hogy

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - e^{-4}(1 + 4) \\ P(B) &= 1 - e^{-4}. \end{aligned}$$

Innen,

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{1 - 5e^{-4}}{1 - e^{-4}} \\ &= 1 - \frac{4e^{-4}}{1 - e^{-4}} \\ &= 1 - 4 \cdot \frac{0,0183}{0,9817} \\ &= 1 - 4 \cdot 0,0186 \\ &= 1 - 0,0744 \\ &= 0,9256. \end{aligned}$$

2. Feladat Egy kockával dobunk egymás után mindaddig, amíg 1-est nem dobunk. Jelöljük ξ-vel azt a valószínűségi változót, ami k-val egyenlő, ha az első 1-est a k-adik dobásra dobtuk. Legyen továbbá η az a valószínűségi változó, ami az első 1-esig dobott 6-osok számával egyenlő. Határozzuk meg η eloszlását!

Mego.: Legyen $l \geq 0$ tetszőleges, meg kell határoznunk

$$P(\eta = l)$$

értékét. A negatív binomiális eloszlás képlete alapján,

$$P(\xi = k) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

Vegyük észre továbbá, hogy minden $k \leq l$ esetén

$$P(\eta = l | \xi = k) = 0,$$

míg $k > l$-re

$$P(\eta = l | \xi = k) = \binom{k-1}{l} \left(\frac{1}{6}\right)^{l} \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1-l},$$

mert az első $k-1$ dobásban pontosan l dobás 6-os, a többi $k-1-l$ pedig nem lehet sem 6-os sem 1-es. Ebből, a teljes valószínűség tétele alapján,

$$\begin{aligned}
P(\eta = l) &= \sum_{k=l+1}^{\infty} P(\eta = l | \xi = k) P(\xi = k) \\
&= \sum_{k=l+1}^{\infty} \binom{k-1}{l} \left(\frac{1}{6}\right)^{l+1} \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1-l} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{l} \left(\frac{4}{6}\right)^{-l} \sum_{k=l+1}^{\infty} \binom{k-1}{l} \left(\frac{20}{36}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{l} \sum_{k=l+1}^{\infty} \binom{k-1}{l} \left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

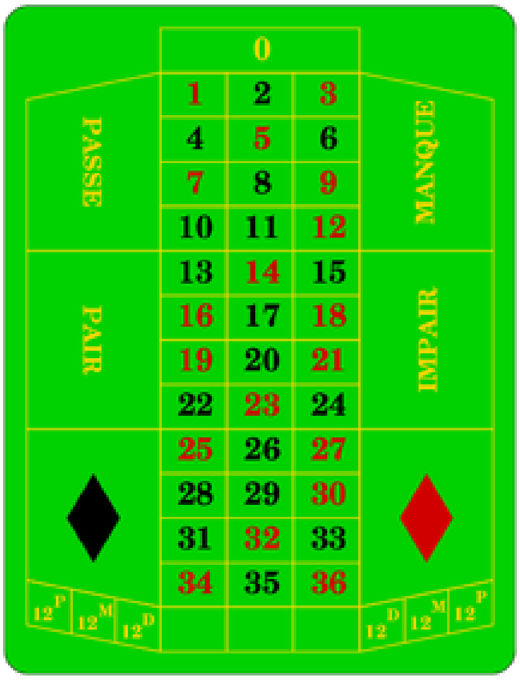
Utóbbi összeg zárt alakra rendezhető egy ismert összefüggés segítségével:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=l+1}^{\infty} \binom{k-1}{l} \left(\frac{5}{9}\right)^{k-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{l} \left(\frac{5}{9}\right)^{k} - \sum_{k=0}^{l} \binom{k}{l} \left(\frac{5}{9}\right)^{k} \\
&= \left(\frac{5}{9}\right)^{l} \left(1 - \frac{5}{9}\right)^{-l-1} - \sum_{k=0}^{l} \binom{k}{l} \left(\frac{5}{9}\right)^{k} \\
&= \left(\frac{5}{9}\right)^{l} \left(\frac{4}{9}\right)^{-l-1} - \sum_{k=0}^{l} \binom{k}{l} \left(\frac{5}{9}\right)^{k} \\
&= \left(\frac{5}{4}\right)^{l} \cdot \frac{9}{4} - \sum_{k=0}^{l} \binom{k}{l} \left(\frac{5}{9}\right)^{k}
\end{aligned}$$

14. 2. Vizsga, 2018 január 3.

1. Feladat

Íme egy (angol) rulettasztal:



A rulettgolyó a korongon egyenletes eloszlás szerint a

$$\Omega = \{0, 1, \dots, 36\}$$

számokkal jelzett mezők pontosan egyikébe esik bele. A 0-s nem számít sem párosnak (pair), sem páratlannak (impair), sem pirosnak, sem feketének. Az ábra alapján válaszoljuk meg a következő kérdéseket!

(i) Függetlenek-e? A) páros, B) fekete. (2p)

(ii) Illusztráljuk a teljes valószínűség tételét a következő eseményre: C) az eredmény 5-tel osztható, valamint a következő teljes eseményrendszerre: D1) 12P (első tucat, azaz 1-12), D2) 12M (középső tucat, azaz 13-24), D3) 12D (utolsó tucat, 25-36), D4) {0}. (2p)

(iii) Egy játékos egy körben az 1-esre tesz 1000 forintot. Ha talál, akkor kap 35000 Ft-ot (de nem kapja vissza a feltett 1000-et), különben elveszti a feltett összeget és nem kap semennyit. Mennyi a nyereményének várható értéke? (3p)

(iv) Egy játékos egy körben a párosra tesz 1000 forintot. Ha talál, akkor a nyereménye 2000Ft (de nem kapja vissza a feltett 1000-et), ha 0-s jön ki, akkor a nyereménye 500Ft (de nem kapja vissza a feltett 1000-et), különben elveszti a feltett összeget és nem kap semennyit. Mennyi a nyereményének várható értéke? (3p)

Mego.:

(i) Tudjuk, hogy $|\Omega| = 37$, $|A| = 18 = |B|$. A tábla alapján továbbá

$$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 20, 22, 24, 26, 28\},$$

s így $|A \cap B| = 10$. Ezért

$$P(A) = \frac{18}{37} = P(B), \quad P(A \cap B) = \frac{10}{37} \neq P(A)P(B),$$

tehát A és B nem függetlenek.

(ii)

$$P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = \frac{12}{37}, \quad P(D_4) = \frac{1}{37}.$$

Továbbá,

$$P(C|D_1) = \frac{2}{12}$$
$$P(C|D_2) = \frac{2}{12}$$
$$P(C|D_3) = \frac{3}{12}$$
$$P(C|D_4) = 1.$$

Így,

$$\begin{aligned}
P(C) &= \sum_{j=1}^{4} P(C|D_j)P(D_j) \\
&= \frac{2}{12}\cdot\frac{12}{37} + \frac{2}{12}\cdot\frac{12}{37} + \frac{3}{12}\cdot\frac{12}{37} + \frac{1}{37} \\
&= \frac{8}{37}.
\end{aligned}$$

(iii) Legyen ξ a nyeremény összege. Ekkor

$$E(\xi) = -1000 + \frac{1}{37}\cdot 35000 = -\frac{2000}{37}.$$

(iv) Legyen η a nyeremény összege. Ekkor

$$E(\eta) = -1000 + \frac{18}{37}\cdot 2000 + \frac{1}{37}\cdot 500 = -\frac{500}{37}.$$

2. Feladat Egy héten 100000 lottószelvényt küldenek be. Mi a valószínűsége, hogy 74600 és 74700 közé esik azon szelvények száma, amelyeken egyetlen találat sincs?

Mego.: Annak a valószínűsége, hogy egy szelvény 0 találatos:

$$p = \frac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{85\cdot 84\cdot 83\cdot 82\cdot 81}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86} = 0,74635.$$

Legyen ξ^* a 100000 szelvény közül a 0-találatosak száma. Ekkor

$$E(\xi^*) = 74635, \quad D(\xi^*) = \sqrt{100000\cdot 0,74635\cdot(1-0,74635)} = 137,6.$$

Legyen

$$\eta = \frac{\xi^* - 74635}{137,6},$$

ekkor η közelítőleg standard normális eloszlású. Tehát

$$\begin{aligned}
P\left(74600 \le \xi^* < 74700\right) &= P\left(-\frac{35}{137,6} \le \eta < \frac{65}{137,6}\right) \\
&= P\left(-0,25 \le \eta < 0,47\right) \\
&= \Phi(0,47) + \Phi(0,25) - 1 \\
&= 0,68082 + 0,59871 - 1 \\
&= 0,27953.
\end{aligned}$$

15. 3. Vizsga, 2018 január 10.

1. Feladat Két, egyenként 10000 óra átlagos élettartamú izzót sorba kötünk. Állapítsuk meg az így kapott izzósor élettartamának sűrűségfüggvényét! (Soros kapcsolás esetén az izzósor kialszik, amennyiben a kapcsolt izzók legalább egyike kialszik.)

Mego.: Minden $t > 0$ esetén legyen $A(t)$ (illetve $B(t)$) azok az események, hogy a sorban első (illetve második) izzó t óra alatt nem ég ki. Legyen továbbá $C(t)$ az az esemény, hogy az izzósor nem alszik ki t óra alatt. Ekkor, a soros kapcsolás miatt

$$C(t) = A(t)\cap B(t).$$

Feltehetjük, hogy az első illetve második izzó egymástól függetlenül ég (vagy nem ég) ki t óra alatt, továbbá a kiégésük időpontja exponenciális eloszlást követ, mégpedig a feladat szövege alapján mindkettő $\lambda = 10^{-4}$ paraméterrel. Ezért:

$$\begin{aligned}
P(C(t)) &= P(A(t)\cap B(t)) \\
&= P(A(t))P(B(t)) \\
&= e^{-10^{-4}t}e^{-10^{-4}t} \\
&= e^{-2\cdot 10^{-4}t}.
\end{aligned}$$

Mivel
$$2 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{5000},$$
azért a kapott eredmény alakjából kitűnik, hogy $C(t)$ exponenciális eloszlást követ, 5000 óra várható értékkel. A keresett sűrűségfüggvény:
$$\frac{1}{5000} e^{-t/5000}.$$

16. 4. Vizsga, 2018 június 6.

1. Feladat András, Barbara és Zsuzsa találkozót beszélnek meg a város egy pontján. Zsuzsa pontban 12 órakor megy a megbeszélt helyszínre, András és Barbara pedig a 12 óra és 1 óra közötti egyórás időintervallumban egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint. Mindhárman 5 percet várnak, azután elmennek. Mi a valószínűsége, hogy egyikük sem találkozik a másik kettőjük közül egyikkel sem?

Mego.: Jelölje a és b András és Barbara érkezési időpontját, percben mérve. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \leq b$, tehát
$$\Omega = \{(a, b) \in [0, 60] \times [0, 60] : \quad a \leq b\},$$
és $T(\Omega) = \frac{1}{2} 60^2 = 1800$.

Akkor és csak akkor találkozik András vagy Barbara Zsuzsával, ha $a \leq 5$ (hiszen ha $b \leq 5$ akkor az $a \leq b$ feltevés miatt $a \leq 5$ is teljesül). Továbbá, akkor és csak akkor találkozik András Barbarával, ha $b - a \leq 5$. Ennek a két tartománynak a komplementere Ω-ban az a derékszögű H háromszög, amelynek csúcsai
$$A(5, 10), \quad B(5, 60), \quad C(55, 60).$$
Ennek területe:
$$T(H) = \frac{1}{2} 50^2.$$
Innen a keresett valószínűség:
$$\frac{T(H)}{T(\Omega)} = \frac{25}{36}.$$

2. FEJEZET

Differenciál-egyenletek

1. 2. ZH, 2015 november 25.

1. Feladat Végezzünk fokozatos közelítést másodrendben az alábbi kezdeti-érték feladathoz!

$$y'(x) = x^3 + y^2(x), \quad y(0) = 1$$

Mego.:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1, \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x (t^3 + 1)dt = 1 + x + \frac{x^4}{4}, \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x \left(t^3 + \left(1 + t + \frac{t^4}{4}\right)^2 \right) dt = \\
&= 1 + \int_0^x \left(1 + 2t + t^2 + t^3 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{2} + \frac{t^8}{16}\right) dt = \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} + \frac{x^6}{12} + \frac{x^9}{144}.
\end{aligned}$$

2. Feladat Oldjuk meg!

$$y'(x) = \frac{x^2 + y^2(x)}{xy(x)}.$$

Mego.: Homogén egyenlet, használjuk az $xu(x) = y(x)$ helyettesítést:

$$xu'(x) + u(x) = \frac{1 + u^2(x)}{u(x)},$$

ahonnan

$$u'(x)u(x) = \frac{1}{x}.$$

Ezt integrálva x szerint azt kapjuk, hogy

$$u^2(x) = 2\ln|x| + c,$$

amiből pedig

$$y^2(x) = 2x^2 \ln|x| + cx^2,$$

azaz

$$y(x) = \pm\sqrt{2x^2 \ln|x| + cx^2}.$$

3. Feladat Határozzuk meg a tipusát és oldjuk meg!

$$y'(x) = -\frac{\cos(x + 2y) + 3x^2 \sin(y) + 1}{2\cos(x + 2y) + x^3 \cos(y)}$$

Mego.: Egzakt egyenlet:

$$y'(x)\left(2\cos(x + 2y) + x^3 \cos(y)\right) + \cos(x + 2y) + 3x^2 \sin(y) + 1 = 0,$$

azaz

$$g(x, y) = 2\cos(x + 2y) + x^3 \cos(y), \quad h(x, y) = \cos(x + 2y) + 3x^2 \sin(y) + 1$$

ahonnan

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -2\sin(x + 2y) + 3x^2 \cos(y) = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Az F skalár-potenciál meghatározása:

$$F(x, y) = \int g(x, y)dy = \sin(x + 2y) + x^3 \sin(y) + \phi(x),$$

másrészt
$$F(x,y) = \int h(x,y)dx = \sin(x+2y) + x^3\sin(y) + x + \psi(y),$$
amiből
$$F(x,y) = \sin(x+2y) + x^3\sin(y) + x + c.$$
Az általános megoldás implicit alakja:
$$\sin(x+2y) + x^3\sin(y) + x + c = 0.$$

4. Feladat Oldjuk meg a következő kezdeti-érték feladatot!
$$y'(x) - \cos(x)y(x) = xe^{\sin(x)}, \quad y(0) = 1.$$

Mego.: A hozzá-tartozó homogén egyenlet:
$$Y'(x) = \cos(x)Y(x),$$
megoldása
$$Y(x) = ce^{\sin(x)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$
Állandó változtatása:
$$y(x) = c(x)e^{\sin(x)},$$
ahol $c(x)$ megoldja a következő egyenletet:
$$c'(x)e^{\sin(x)} = xe^{\sin(x)}.$$
Ebből
$$c(x) = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$
az általános megoldás tehát
$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)e^{\sin(x)}.$$
Behelyettesítve $x = 0$-t azt kapjuk, hogy
$$y(0) = ce^0 = c,$$
így a kezdeti-érték feladat megoldása
$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)e^{\sin(x)}.$$

2. 2. ZH, 2016 november 23.

1. Feladat Tekintsük a
$$y' = y^2 - x^2 + 1, \quad y(1) = -1$$
kezdeti-érték feladatot! Közelítsük a megoldást szukcesszív approximáció módszerének első két lépésével ($n = 0, n = 1$), és becsüljük felülről a különbséget a $T = [0,2] \times [-3/2, -1/2]$ téglalapból kiindulva! Továbbá, ábrázoljuk a $c = 0, c = 1$ és $c = 2$ értékekhez tartozó izoklin-vonalakat!

Mego.:
$$\begin{aligned} y_0 &= -1 \\ y_1 &= -1 + \int_1^x 1 - t^2 + 1\mathrm{d}t \\ &= -1 + \left[2t - \frac{t^3}{3}\right]_{t=1}^x \\ &= -\frac{8}{3} + 2x - \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

Legyen $f(x,y) = y^2 - x^2 + 1$. Az $M = \max_{(x,y)\in T} |f(x,y)|$ meghatározásához vegyük észre, hogy a T téglelapon belül

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x < 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y > 0,$$

azaz f-nek nincs kritikus pontja. Tehát, f a szélsőértékeit a téglap sarkaiban veszi fel. Mivel

$$f(0,-3/2) = \frac{13}{4}, \quad f(0,-1/2) = \frac{5}{4}, \quad f(2,-3/2) = -\frac{3}{4}, \quad f(2,-1/2) = -\frac{11}{4},$$

azért $M = \frac{13}{4}$. Emiatt

$$\alpha = \min(1, \frac{1/2}{13/4}) = \frac{2}{13}.$$

Másrészt,

$$N = \max_{(x,y)\in T} |\frac{\partial f}{\partial y}| = \max_{(x,y)\in T} |2y| = 3,$$

ahonnan

$$N\alpha = \frac{6}{13}.$$

Az n-edik lépés különbsége a megoldástól legfeljebb

$$\frac{M}{N}\frac{(N\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}e^{N\alpha},$$

amely $n = 1$-re a $\frac{3}{26}e^{6/13} = 0,18$ érték.

Az izoklin vonalak $c = 1$ esetén az $y = x$ és $y = -x$ egyenesek uniója, $c = 2$ esetén két hiperbola-szár, amelyek aszimptotái az előbb mondott egyenesek, és amelyek metszik az y-tengelyt a $(0, \pm 1)$ pontokban, $c = 0$ esetben pedig két hiperbola-szár, amelyek aszimptotái szintén az előbb mondott egyenesek, és amelyek metszik az x-tengelyt a $(\pm 1, 0)$ pontokban.

2. Feladat Adjuk meg az általános megoldását implicit alakban!

$$(\sin(x) - x\sin(y))y'(x) + y\cos(x) + \cos(y) = 0$$

Mego.: Legyen

$$g(x,y) = y\cos(x) + \cos(y), \quad h(x,y) = \sin(x) - x\sin(y),$$

akkor

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \cos(x) - \sin(y) = \frac{\partial h}{\partial x},$$

így az egyenlet egzakt. Egy megfelelő potenciál-függvény:

$$F(x,y) = \int y\cos(x) + \cos(y)\mathrm{d}x = y\sin(x) + x\cos(y) + c(y),$$

másrészt

$$F(x,y) = \int \sin(x) - x\sin(y)\mathrm{d}y = y\sin(x) + x\cos(y) + d(x).$$

Látjuk, hogy egy közös megoldás

$$F(x,y) = y\sin(x) + x\cos(y),$$

tehát a megoldás implicit alakja

$$y\sin(x) + x\cos(y) = \text{áll.}$$

3. Feladat Adjuk meg az alábbi kezdeti-érték feladat megoldását!

$$y'(x) + 2\tan(x)y(x) = \sin(x)\cos(x), \quad y(0) = 2$$

Mego.: A megfelelő homogén egyenlet megoldása:

$$y_h(x) = \exp\left(\int -2\tan(x)\mathrm{d}x\right) = \exp(2\ln|\cos(x)| + c) = C\cdot\cos^2(x).$$

Az inhomogén egyenletet ebből a C állandó változtatásával nyerjük:

$$C'(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)} = \tan(x) = -\frac{\cos'(x)}{\cos(x)},$$

azaz

$$C(x) = C - \ln|\cos(x)|.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y_i(x) = (C - \ln|\cos(x)|)\cos^2(x).$$

Ebbe $x = 0$-t helyettesítve:

$$2 = y_p(0) = C,$$

tehát a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p(x) = (2 - \ln|\cos(x)|)\cos^2(x).$$

4. Feladat Adjuk meg az általános megoldását, és lássuk be hogy a kapott függvényrendszer lineárisan független!

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

Mego.: A karakterisztikus polinom:

$$P(k) = k^3 + 2k^2 + k = k(k+1)^2,$$

amelynek gyökei: $k_1 = 0$, 1 multiplicitással és $k_2 = -1$, 2 multiplicitással. Emiatt az általános megoldás

$$c_1 + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x}$$

alakú. A lineárisan függetlenséghez számoljuk ki a harmadik függvény első két deriváltját:

$$(xe^{-x})' = (1-x)e^{-x}, \quad (xe^{-x})'' = (x-2)e^{-x}.$$

A rendszer Wronski-determinánsa tehát

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-x} & xe^{-x} \\ 0 & -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \\ 0 & e^{-x} & (x-2)e^{-x} \end{pmatrix},$$

amelyet első oszlopa szerint kifejtve kapjuk, hogy

$$W(1, e^{-x}, xe^{-x}; x) = e^{-2x}.$$

Mivel ez a függvény nem mindenhol 0, azért egy órai tételből következik, hogy a függvényrendszer lineárisan független.

3. 2. pót-ZH, 2016 november 30.

1. Feladat Közelítsük a

$$y' = y^2 + x$$

kezdeti-érték feladat megoldását szukcesszív approximáció módszerének első három lépésével ($n = 0, n = 1, n = 2$)! Ábrázoljuk a $c = 0, c = 1$ és $c = -1$ értékekhez tartozó izoklin-vonalakat a megfelelő értinő-mezővel, és vázoljuk fel sematikusan a fenti kezdeti-érték feladat megoldását! Hogyan viselkedik ez a megoldás $x \to \infty$ esetén?

Mego.:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1, \\ y_1(x) &= 1 + \int_0^x (1+t)\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{x^2}{2} \\ y_2(x) &= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{20}x^5. \end{aligned}$$

A c értékhez tartozó izoklin-vonal:

$$y^2 + x = c,$$

egy x-tengely negatív irányába nyíló tengelyű parabola. A keresett $y(x)$ megoldás $x \to \infty$ esetén tart $+\infty$-be.

2. Feladat Oldjuk meg csak x-től függő integráló tényező segítségével a

$$y'(\tan(x) - 2y) + 1 + y + (y^2 - x)\tan(x) = 0$$

differenciál-egyenletet!

Mego.: Legyen

$$g(x, y) = 1 + y + (y^2 - x)\tan(x), \quad h(x, y) = \tan(x) - 2y.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) &= \frac{1}{\tan(x) - 2y}\left(1 + 2y\tan(x) - \frac{1}{\cos^2(x)}\right)\\ &= \frac{1}{\tan(x) - 2y}\left(2y\tan(x) - \tan^2(x)\right)\\ &= -\tan(x).\end{aligned}$$

Egy $M(x)$ integráló tényező megkereséséhez meg kell oldani a

$$\frac{M'}{M} = -\tan(x)$$

differenciál-egyenletet. Könnyen látszik, hogy egy megoldása

$$M(x) = \cos(x).$$

Végigszorozva az eredeti egyenletet M-mel:

$$y'(\sin(x) - 2y\cos(x)) + (1 + y)\cos(x) + (y^2 - x)\sin(x) = 0,$$

ami már egzakt egyenlet. Keressünk hozzá egy potenciál-függvényt:

$$F(x, y) = \int \sin(x) - 2y\cos(x)\mathrm{d}y = y\sin(x) - y^2\cos(x) + c(x),$$

másrészt

$$\begin{aligned}F(x, y) &= \int (1 + y)\cos(x) + (y^2 - x)\sin(x)\mathrm{d}x\\ &= (1 + y)\sin(x) + (x - y^2)\cos(x) - \sin(x) + d(y),\end{aligned}$$

ahonnan

$$F(x, y) = y\sin(x) + (x - y^2)\cos(x),$$

Az egyenlet általános megoldása implicit alakban: $F(x, y) = c$, ahol $c \in \mathbf{R}$ paraméter.

3. Feladat Oldjuk meg:

$$y' + x^2 y = -x^2, \quad y(0) = 1.$$

Mego.: A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y(x) = C\exp\left(-\frac{x^3}{3}\right).$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldását a $C = C(x)$ variálással kapjuk:

$$C'(x) = -x^2\exp\left(\frac{x^3}{3}\right),$$

amelynek megoldása

$$C(x) = C - \exp\left(\frac{x^3}{3}\right),$$

ahol C állandó. A kezdeti érték feladatot megoldó partikuláris megoldás:

$$1 = y_p(0) = C - 1,$$

azaz $C = 2$, és

$$y_p(x) = -1 + 2\exp\left(-\frac{x^3}{3}\right)$$

4. Feladat Oldjuk meg Laplace-transzformáció segítségével az alábbi kezdeti-érték feladatot!

$$y'' - 2y' + 2y = e^x, \quad y(0) = 1, y'(0) = -2$$

Mego.: Jelöljük y Laplace-transzformáltját $\mathcal{L}(y) = Y(k)$-val. Ekkor

$$\mathcal{L}(y') = kY(k) - 1, \quad \mathcal{L}(y'') = k^2 Y(k) - k + 2,$$

az egyenlet bal oldalának Laplace-transzformáltja tehát

$$(k^2 - 2k + 2)Y(k) - k + 4.$$

Az egyenlet jobb oldalának Laplace-transzformáltja:

$$\frac{1}{k-1}.$$

Ezért a feladat ekvivalens a következő algebrai egyenlettel:

$$(k^2 - 2k + 2)Y(k) = k - 4 + \frac{1}{k-1},$$

amiből algebrai átalakításokkal azt kapjuk, hogy

$$Y(k) = \frac{k^2 - 5k + 5}{(k-1)(k^2 - 2k + 2)}.$$

A jobb oldal parciális törtekre bontása a következő alakú:

$$\frac{A}{k-1} + \frac{B}{(k-1)^2 + 1} + \frac{C(k-1)}{(k-1)^2 + 1}.$$

Az együtthatókra a

$$\begin{aligned} A + C &= 1 \\ -2A + B - 2C &= -5 \\ 2A - B + C &= 5 \end{aligned}$$

lineáris rendszer adódik, amelynek megoldása

$$A = 1, \quad B = -3, \quad C = 0.$$

Tehát,

$$Y(k) = \frac{1}{k-1} - \frac{3}{(k-1)^2 + 1},$$

ahonnan inverz Laplace-transzformációval

$$y(x) = e^x - 3e^x \sin(x).$$

4. 2. pót-pót-ZH, 2016 december 14.

1. Feladat Oldjuk meg:

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0, \quad y(1) = -1.$$

Mego.: Homogén egyenlet, legyen

$$y = xu,$$

ekkor az u-ra kapott egyenlet:

$$-2\frac{uu'}{u^2 + 1} = \frac{1}{x}.$$

Ebből:

$$\ln(u^2 + 1) = -\ln|x| + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$, és

$$u^2 + 1 = \frac{C}{x},$$

ahol $C \in \mathbb{R}$. Ezt átrendezve azt kapjuk, hogy az általános megoldás

$$y = \pm\sqrt{Cx - x^2}.$$

A keresett partikuláris megoldás az $x = 1$ értékhez negatív értéket rendel, ezért

$$2016 december 20. y = -\sqrt{Cx - x^2}$$

alakú. Behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$1 = \sqrt{C - 1},$$

ahonnan $C = 2$, és a keresett megoldás:

$$y = -\sqrt{2x - x^2}.$$

2. Feladat Oldjuk meg:

$$y' + (x+1)y = -xe^{-x}, \quad y(-2) = 0.$$

Mego.: A homogén egyenlet:

$$Y' = -(x+1)Y,$$

Ennek általános megoldása:

$$Y = C\exp\left(-\frac{x^2}{2} - x\right),$$

ahol $C \in \mathbb{R}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y = C(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2} - x\right)$$

alakú, ahol $C(x)$ teljesíti a

$$C'(x) = -x\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

egyenletet. Ennek megoldása:

$$C(x) = C - \exp\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

ahol $C \in \mathbb{R}$. Ezt visszahelyettesítve látjuk, hogy az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y = C\exp\left(-\frac{x^2}{2} - x\right) - e^{-x}.$$

A megfelelő partikuláris megoldáshoz oldjuk meg a következő egyenletet:

$$0 = y(-2) = C - e^2.$$

A megoldás $C = e^2$, azaz a keresett megoldás:

$$y = \exp\left(-\frac{x^2}{2} - x + 2\right) - e^{-x}.$$

3. Feladat Tegyük egzakttá csak x-től függő multiplikátorral, majd adjuk meg explicit alakban az általános megoldását!

$$8xy^3y' + x^3 + y^4 = 0.$$

Mego.: A multiplikátor teljesíti:

$$\begin{aligned}(\ln|M(x)|)' &= \frac{1}{8xy^3}\left(\frac{\partial x^3 + y^4}{\partial y} - \frac{\partial 8xy^3}{\partial x}\right)\\ &= \frac{1}{8xy^3}(4y^3 - 8y^3)\\ &= -\frac{1}{2x},\end{aligned}$$

ahonnan

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}.$$

Az egyenletet megszorozva M-mel a következő ekvivalens egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}}8xy^3y' + \frac{1}{\sqrt{|x|}}(x^3 + y^4) = 0,$$

amely egzakt. Az F potenciál egyrészt:

$$F(x,y) = \int \frac{1}{\sqrt{|x|}}8xy^3\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{|x|}}2xy^4 + c(x),$$

másrészt

$$F(x,y) = \int \frac{1}{\sqrt{|x|}}(x^3 + y^4)\mathrm{d}x = \frac{2}{7}x^4\frac{1}{\sqrt{|x|}} + 2y^4\frac{x}{\sqrt{|x|}} + d(y)$$

alakú. Innen egy potenciál:

$$F(x,y) = \frac{2}{7}x^4\frac{1}{\sqrt{|x|}} + 2y^4\frac{x}{\sqrt{|x|}},$$

és az eredeti egyenlet implicit megoldása $F(x,y) = d$, ahol $d \in \mathbb{R}$ állandó. Végül, ebből kifejezhető y az x változóból:

$$y(x) = \left(d\frac{\sqrt{|x|}}{2x} - \frac{x^3}{7}\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

4. Feladat Oldjuk meg Laplace-transzformáció segítségével az alábbi kezdeti-érték feladatot!

$$y''' - 2y'' + y' = xe^x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Mego.: Jelöljük y Laplace-transzformáltját $\mathcal{L}(y) = Y(s)$-sel. Ekkor:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y') &= sY(s)\\ \mathcal{L}(y'') &= s^2Y(s)\\ \mathcal{L}(y''') &= s^3Y(s)\\ \mathcal{L}(xe^x) &= \frac{1}{(s-1)^2}.\end{aligned}$$

Az Y-ra nyert algebrai egyenlet:

$$(s^3 - 2s^2 + s)Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2},$$

átrendezve:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)^4}.$$

Ennek parciális tört felbontása:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3} + \frac{E}{(s-1)^4}.$$

Az együtthatók összehasonlításából kapott lineáris egyenlet megoldása:

$$A = 1,\ B = -1,\ C = 1,\ D = -1,\ E = 1,$$

tehát

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^4}.$$

Innen inverz Laplace-transzformációval:

$$y(x) = 1 - e^x\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

5. 1. Vizsga, 2016 december 20.

3. Feladat Oldjuk meg Laplace-transzformációval!

$$y'' - 2y' + y = (x+1)e^x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$$

Mego.: A bal oldal Laplace-transzformáltja:

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) - s + 4,$$

a jobb oldalé:

$$\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}.$$

A két kifejezést összehasonlítva:

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{s-4}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^4}\\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^4}.\end{aligned}$$

Inverz Laplace-transzformációval:

$$y(x) = e^x \left(1 - 3x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right).$$

6. 2. Vizsga, 2017 január 10.

3. Feladat Oldjuk meg Laplace-transzformációval!

$$4y'' + y = x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

Mego.: A bal oldal Laplace-transzformáltja:

$$(4s^2 + 1)Y(s) - 4s + 4,$$

a jobb oldalé:

$$\frac{1}{s^2}.$$

Innen:

$$\left(s^2 + \frac{1}{4}\right) Y(s) = s - 1 + \frac{1}{4}\frac{1}{s^2},$$

azaz

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{1}{4}} - 2\frac{\frac{1}{2}}{s^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\left(s^2 + \frac{1}{4}\right) s^2}.$$

Az utolsó tagot átírhatjuk

$$\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + \frac{1}{4}}$$

alakba, ahonnan

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{1}{4}} - 4\frac{\frac{1}{2}}{s^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{s^2}.$$

Ebből inverz Laplace-transzformációval azt kapjuk, hogy

$$y(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) + x.$$

7. 3. Vizsga, 2017 január 17.

3. Feladat Oldjuk meg Laplace-transzformációval!

$$y''' - 2y'' + y' = x + e^x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Mego.: Az egyenlet Laplace-transzformáltja:

$$(s-1)^2 sY(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1},$$

ahonnan

$$Y(s) = \frac{s^2 + s - 1}{s^3(s-1)^3}.$$

Ennek parciális tört-alakja

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s-1} + \frac{E}{(s-1)^2} + \frac{F}{(s-1)^3}.$$

A konstansokra rendre a következőket kapjuk:

$$A = 2, B = 2, C = 1, D = -2, E = 0, F = 1.$$

Innen:

$$y(x) = 2 + 2x + \frac{x^2}{2} - 2e^x + \frac{x^2}{2}e^x.$$

8. 2. ZH, 2017 november 22.

1. Feladat Tekintsük a

$$y' = \frac{x}{y} + 1, \quad y(0) = 1$$

kezdeti-érték feladatot! Közelítsük a megoldást szukcesszív approximáció módszerének első három lépésével ($n = 0, n = 1, n = 2$). Vizsgáljuk az egyenletet a

$$[-a, a] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

téglalapon. Mely a értékre lesz legbővebb a megoldás értelmezési tartománya?

Mego.: Képlet alapján

$$y_0(x) \equiv 1, \quad y_1(x) = 1 + \int_0^x t + 1 \mathrm{d}t = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

valamint

$$\begin{aligned} y_2(x) &= 1 + \int_0^x \left(1 + \frac{t}{1 + t + t^2/2}\right) \mathrm{d}t \\ &= 1 + x + \int_0^x \frac{2t}{(t+1)^2 + 1} \mathrm{d}t \\ &= 1 + x + \int_0^x \frac{2t + 2}{(t+1)^2 + 1} - \frac{2}{(t+1)^2 + 1} \mathrm{d}t \\ &= 1 + x + \left[\ln(t^2 + 2t + 2) - 2\arctan(t+1)\right]_{t=0}^x \\ &= 1 - \ln(2) + \frac{\pi}{2} + x + \ln(x^2 + 2x + 2) - 2\arctan(x+1). \end{aligned}$$

Tekintsük a

$$f(x, y) = \frac{x + y}{y}$$

függvényt a megadott téglalapon. A megoldás értelmezett az $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ intervallumon, ahol

$$\alpha = \min(a, \frac{1}{2M}),$$

ahol

$$M = \max(|f|)$$

a megadott tartományon. Látszik, hogy f a maximumát az $x = a, y = 1/2$ pontban veszi fel, mégpedig

$$M = 2a + 1.$$

Mivel az $a \mapsto a$ szigorúan monoton növekedő, $1/2M$ pedig monoton csökkenő a-ban, a legnagyobb értéket α-ra akkor kapjuk, amikor

$$a = \frac{1}{4a + 2}.$$

Innen a megoldóképletből a pozitív gyök

$$a = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

2. Feladat A $z = y^{-1}$ helyettesítést használva adjuk meg az általános megoldását:

$$y'(x) = y(x)^2 + \frac{1}{2x^2}.$$

Mego.: A helyettesítés után az egyenlet

$$z'(x) = -1 - \frac{z(x)^2}{2x^2}$$

alakú. Ez egy homogén egyenlet, így alkalmazzuk az újabb,

$$u(x) = \frac{z(x)}{x}$$

helyettesítést. Ezután az egyenlet alakja:

$$u'(x) = -\left(1 + u(x) + \frac{u(x)^2}{2}\right)\frac{1}{x}.$$

Ez szétválasztható egyenlet, a változók szétválasztása után a

$$\frac{u'(x)}{(u(x)+1)^2+1} = -\frac{1}{2x}$$

egyenletet nyerjük, aminek megoldása:

$$\arctan(u(x)+1) = -\frac{1}{2}\ln|x| + c,$$

valamely $c \in \mathbf{R}$ állandóval. Innen

$$u(x) = \tan\left(-\frac{1}{2}\ln|x| + c\right) - 1,$$

és visszahelyettesítve

$$y(x) = \frac{1}{x\tan\left(-\frac{1}{2}\ln|x| + c\right) - x}.$$

3. Feladat Oldjuk meg Laplace-transzformációval!

$$y''' + y'' - y' - y = e^x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1.$$

Mego.: A bal oldal Laplace-transzformáltja:

$$(s^3 + s^2 - s - 1)Y(s) - s^2 - s + 2,$$

ahol $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$. A jobb oldalé:

$$\frac{1}{s-1}.$$

Az algebrai egyenlet:

$$(s+1)^2(s-1)Y(s) = s^2 + s - 2 + \frac{1}{s-1},$$

azaz

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2(s-1)^2} \\ &= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2(s-1)^2}. \end{aligned}$$

Az utolsó tagot hozzuk parciális tört alakra:

$$\frac{1}{(s+1)^2(s-1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2}.$$

A kapott lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$A = \frac{1}{2},\ B = \frac{3}{4},\ C = -\frac{1}{2},\ D = \frac{1}{4}.$$

Innen

$$Y(s) = \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{7}{4}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)^2}$$

és inverz Laplace-transzformációval

$$y(x) = \frac{3}{2}e^x + \frac{7}{4}xe^x - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{4}xe^{-x}.$$

4. Feladat Egy pénzérmét egymás után n-szer feldobunk. Adjunk becslést a Nagy Számok Törvénye alapján olyan n értékre, amelyre annak a valószínűsége, hogy a "fej" dobások viszonylagos gyakorisága $0,4$ és $0,6$ közé esik, legalább 99%.

Mego.: Legyen ξ_i az a valószínűségi változó, amely 1 értéket vesz fel, ha az érme a "fej" oldalára esik, és 0-t ha az "írás" oldalára. Legyen továbbá

$$\zeta_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$$

a fejek viszonylagos gyakorisága. Az egyes ξ_i változók várható értéke $\frac{1}{2}$ és szórásnégyzete $\frac{1}{4}$. A Nagy Számok Törvénye szerint

$$P(\zeta_n \in [1/2-\varepsilon, 1/2+\varepsilon]) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Alkalmazzuk ezt $\varepsilon = 0,1$ választással:

$$P(0,4 \leq \zeta_n \leq 0,6) \geq 1 - \frac{100}{4n} = 1 - \frac{25}{n}.$$

Mivel azt akarjuk, hogy ez a mennyiség $0,99$ legyen, azért a

$$\frac{25}{n} = \frac{1}{100}$$

egyenletet kapjuk. Innen:

$$n = 2500.$$

9. 2. pót-ZH, 2017 november 29.

1. Feladat Egy ipari létesítmény hűtőfolyadékának t perc elteltével mért $x(t)$ hőmérséklete teljesíti a

$$\dot{x} = \lambda(25 - x)$$

differenciálegyenletet valamely $\lambda > 0$ értékkel. Tudjuk, hogy

$$x(0) = 100 \quad \text{és} \quad x(5) = 95.$$

Határozzuk meg azt a t_0 időértéket, amelyre $x(t_0) = 40$!

Mego.: Állandó együtthatós, inhomogén lineáris egyenlet. A homogén egyenlet megoldása

$$x(t) = Ce^{-\lambda t}.$$

A C állandó változtatásával a

$$\dot{C} = 25\lambda e^{\lambda t}$$

egyenletet kapjuk, amelynek megoldása

$$C(t) = C + 25e^{\lambda t},$$

ahol C már állandó. Innen, az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$x(t) = Ce^{-\lambda t} + 25.$$

Meg kell határoznunk C-t és λ-t a kezdeti feltételekből. Egyrészt, minthogy

$$100 = x(0) = C + 25,$$

látjuk hogy $C = 75$. Másrészt, minthogy

$$95 = x(5) = 75e^{-5\lambda} + 25,$$

átrendezve azt kapjuk hogy

$$5\lambda = \ln(75) - \ln(70),$$

ahonnan

$$\lambda = 0,0138.$$

Az egyenlet t_0-ra:

$$40 = 75e^{-0,0138t_0} + 25,$$

átrendezve

$$e^{-0,0138t_0} = \frac{1}{5},$$

ahonnan

$$t_0 = \frac{\ln(5)}{0,0138} = 116.$$

2. Feladat Egy rugó kimozdulását a csillapított

$$\ddot{x} + 0,2\dot{x} + x = 0$$

rezgési egyenlet vezérli. Állapítsuk meg, hogy hány teljes periódus megtétele után csökken le az amplitudó az eredeti amplitudó felére!

Mego.: Az órai képlet alapján, a megoldás alakja

$$x(t) = Ae^{-0,1t}\sin(\sqrt{1-0,01}t+\delta)$$

valamely $A > 0$ kezdeti amplitudóval és $\delta \in [0, 2\pi]$ fázissal. A változó amplitudó $Ae^{-0,1t}$, a periódus pedig $2\pi/\sqrt{1-0,01}$ jó közelítéssel 2π. Meg kell keresnünk azt a t_0 értéket, amelyre

$$Ae^{-0,1t_0} = \frac{A}{2}.$$

Ennek megoldása

$$t_0 = \frac{\ln(2)}{0,1}.$$

A kérdés, hogy ez a t_0 érték hányszorosa 2π-nek:

$$\frac{t_0}{2\pi} = \frac{5\ln(2)}{\pi} = 1,1.$$

Ezért, az amplitudó egy periódus után feleződik meg.

3. Feladat Oldjuk meg:

$$y' + (x+1)y = \left(\frac{1}{x} - x\right)e^{-x-\frac{x^2}{2}}, \quad y(1) = 0.$$

Mego.: Lineáris inhomogén egyenlet. A hozzárendelt homogén lineáris egyenlet általános megoldása:

$$y(x) = Ce^{-x-\frac{x^2}{2}}.$$

A C állandó változtatásával a következő egyenletet nyerjük:

$$C' = \left(\frac{1}{x} - x\right),$$

ahonnan

$$C(x) = \ln x - \frac{x^2}{2} + C,$$

ahol C állandó. Tehát, az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \left(\ln x - \frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x-\frac{x^2}{2}}.$$

A kezdeti érték feladat miatt $C = 1$, tehát a kérdezett partikuláris megoldás:

$$y(x) = \left(\ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)e^{-x-\frac{x^2}{2}}.$$

4. Feladat Oldjuk meg Laplace-transzformációval!

$$\begin{aligned} y' &= 2y + z \\ z' &= 3y + 2z \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= -1. \end{aligned}$$

Mego.: Legyen $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ és $Z(s) = \mathcal{L}\{z\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - 1 \\ \mathcal{L}\{z'\} &= sZ(s) + 1. \end{aligned}$$

Így a transzformált egyenlet:

$$\begin{aligned} sY - 1 &= 2Y + Z \\ sZ + 1 &= 3Y + 2Z, \end{aligned}$$

vagyis átrendezve

$$\begin{aligned} (s-2)Y - Z &= 1 \\ -3Y + (s-2)Z &= -1. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$Y = \frac{s-3}{s^2-4s+1}$$
$$Z = \frac{-s+5}{s^2-4s+1},$$

azaz átalakítva

$$Y = \frac{s-2}{(s-2)^2-3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{(s-2)^2-3}$$
$$Z = -\frac{s-2}{(s-2)^2-3} + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{(s-2)^2-3}.$$

Innen inverz Laplace-transzformációval

$$y(x) = e^{2x}\cosh(\sqrt{3}x) - \frac{e^{2x}}{\sqrt{3}}\sinh(\sqrt{3}x)$$
$$z(x) = -e^{2x}\cosh(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}e^{2x}\sinh(\sqrt{3}x).$$

10. 2. pót-pót-ZH, 2017 december 13.

1. Feladat Egy $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy gráfjának minden $(x, f(x))$ pontbeli érintőjére merőleges egyenes az y-tengelyt a $(0, f(x)+x^2\ln(x))$ pontban metszi. Tudjuk azt is, hogy $f(e)=1$. Határozzuk meg f-et!

Mego.: Mivel a pontbeli érintő meredeksége $f'(x)$, a rá merőleges egyenesé tehát

$$m = -1/f'(x).$$

Ennek az egyensnek a meredekségét azonban meghatározhatjuk a két megadott pontja segítségével is:

$$m = \frac{f(x)-(f(x)+x^2\ln(x))}{x} = -x\ln(x).$$

A két képlet összehasonlításából kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)},$$

amiből integrálással

$$f(x) = \ln(\ln(x)) + c$$

valamely $c\in\mathbb{R}$ állandóra. Mivel

$$\ln(\ln(e)) = \ln(1) = 0,$$

következik hogy $c=1$.

2. Feladat Oldjuk meg $z=\sin(y)$ helyettesítéssel!

$$y' + 2\tan(y) = 0, \quad y(0) = -\frac{\pi}{4}.$$

Hol értelmezett a megoldás?

Mego.: Az egyenlet ekvivalens a következővel:

$$\cot(y)y' = -2.$$

Mivel

$$z' = \cos(y)y',$$

azért

$$\cot(y)y' = \frac{z'}{z} = (\ln(z))'.$$

Innen, integrálva az egyenletet

$$\ln|z| = -2x + c$$

jön, valamely $c\in\mathbb{R}$ állandóra. Exponenciálva mindkét oldalt pedig a

$$z = Ce^{-2x}$$

egyenlőséget kapjuk, ahol $C = \pm e^c \in \mathbb{R}$. Végül, visszahelyettesítve y-t, látjuk hogy

$$y(x) = \arcsin\left(Ce^{-2x}\right).$$

Behelyettesítve $x = 0$-t azt kapjuk, hogy

$$C = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right),$$

ahonnan

$$C = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A megoldás értelmezési tartománya az a szakasz, ahol

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2x} \in (-1, 1).$$

Minthogy a bal oldal minden x-re negatív, azért a feltételünk ekvivalens az

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2x} < 1$$

egyenlőtlenséggel. Elemi algebrai átalakításokból látszik, hogy az ezt teljesítő számok halmaza:

$$D_y = \left(\frac{1}{4}\ln(2), \infty\right).$$

3. Feladat Legyen y tetszőleges kétszer differenciálható függvény. Határozzuk meg az

$$y(x), \sin^2(x), \cos^2(x)$$

függvények Wronski-determinánsát! Mutassuk meg, hogy a kapott lineáris egyenletnek egy alaprendszere $\sin^2(x), \cos^2(x)$.

Mego.: Mivel

$$(\sin^2(x))' = -(\cos^2(x))' = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x),$$

és

$$(\sin(2x))' = 2\cos(2x),$$

azért (például az első oszlop szerint kifejtve) látjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathrm{Wr}(y(x), \sin^2(x), \cos^2(x); x) &= \det\begin{pmatrix} y & \sin^2(x) & \cos^2(x) \\ y' & \sin(2x) & -\sin(2x) \\ y'' & 2\cos(2x) & -2\cos(2x) \end{pmatrix} \\ &= -\sin(2x)y'' - 2\cos(2x)y' - 4\sin(2x)\cos(2x)y \\ &= -\sin(2x)[y'' - 2\cot(2x)y' - 4\cos(2x)y].\end{aligned}$$

Az $y = \sin^2(x)$ és $y = \cos^2(x)$ helyettesítésekkel nyilván

$$\mathrm{Wr}(y(x), \sin^2(x), \cos^2(x); x) = 0,$$

tehát ezen függvények teljesítik a

$$y'' - 2\cot(2x)y' - 4\cos(2x)y = 0$$

egyenletet. Mivel ez az egyenlet másodrendű, elég belátni, hogy a $\sin^2(x), \cos^2(x)$ lineárisan függetlenek. Utóbbihoz pedig elegendő megmutatni, hogy

$$\mathrm{Wr}(\sin^2(x), \cos^2(x); x) \neq 0.$$

Ez a Wronski-determináns viszont éppen y'' együtthatója a fenti képletben:

$$\mathrm{Wr}(\sin^2(x), \cos^2(x); x) = -\sin(2x) \neq 0.$$

4. Feladat Oldjuk meg Laplace-transzformációval!

$$\begin{aligned} y' &= 2y - z + e^x \\ z' &= y - e^x \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 1. \end{aligned}$$

Mego.: Legyen $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ és $Z(s) = \mathcal{L}\{z\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - 1 \\ \mathcal{L}\{z'\} &= sZ(s) - 1. \end{aligned}$$

Így a transzformált egyenlet:

$$\begin{aligned} sY - 1 &= 2Y - Z + \frac{1}{s-1} \\ sZ - 1 &= Y - \frac{1}{s-1}, \end{aligned}$$

ami átrendezve

$$\begin{aligned} (s-2)Y + Z &= 1 + \frac{1}{s-1} \\ -Y + sZ &= 1 - \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása parciális tört alakban:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s-1)^3} \\ Z &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s-1)^3}. \end{aligned}$$

Innen inverz Laplace-transzformációval

$$\begin{aligned} y(x) &= e^x(1 + x + x^2) \\ z(x) &= e^x(1 - x + x^2). \end{aligned}$$

11. 1. Vizsga, 2017 december 20.

3. Feladat Oldjuk meg Laplace-transzformációval!

$$\begin{aligned} y' &= 2y - z + e^x \\ z' &= y - e^x \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 1. \end{aligned}$$

Mego.: Legyen $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ és $Z(s) = \mathcal{L}\{z\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - 1 \\ \mathcal{L}\{z'\} &= sZ(s) - 1. \end{aligned}$$

Így a transzformált egyenlet:

$$\begin{aligned} sY - 1 &= 2Y - Z + \frac{1}{s-1} \\ sZ - 1 &= Y - \frac{1}{s-1}, \end{aligned}$$

ami átrendezve

$$\begin{aligned} (s-2)Y + Z &= 1 + \frac{1}{s-1} \\ -Y + sZ &= 1 - \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása parciális tört alakban:

$$Y = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s-1)^3}$$
$$Z = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s-1)^3}.$$

Innen inverz Laplace-transzformációval

$$y(x) = e^x(1 + x + x^2)$$
$$z(x) = e^x(1 - x + x^2).$$

12. 2. Vizsga, 2018 január 3.

3. Feladat Oldjuk meg Laplace-transzformációval!

$$y' = y - 2z + 1$$
$$z' = y + z - 1$$
$$y(0) = 2$$
$$z(0) = -1.$$

Mego.: Legyen $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ és $Z(s) = \mathcal{L}\{z\}$. Ekkor

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - 2$$
$$\mathcal{L}\{z'\} = sZ(s) + 1.$$

Így a transzformált egyenlet:

$$sY - 2 = Y - 2Z + \frac{1}{s}$$
$$sZ + 1 = Y + Z - \frac{1}{s},$$

ami átrendezve

$$(s-1)Y + 2Z = 2 + \frac{1}{s}$$
$$-Y + (s-1)Z = -1 - \frac{1}{s}.$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$Y = \frac{2s^2 + s + 1}{s(s^2 - 2s + 3)}$$
$$Z = \frac{-s^2 + 2s + 2}{s(s^2 - 2s + 3)},$$

ami parciális tört alakban:

$$Y = \frac{A}{s} + B\frac{s-1}{(s-1)^2 + 2} + C\frac{1}{(s-1)^2 + 2}$$
$$Z = \frac{D}{s} + E\frac{s-1}{(s-1)^2 + 2} + F\frac{1}{(s-1)^2 + 2}.$$

A kapott egyenletrendszer megoldása:

$$A = \frac{1}{3} \qquad B = \frac{5}{3} \qquad C = \frac{10}{3}$$
$$D = \frac{2}{3} \qquad E = -\frac{5}{3} \qquad F = 1.$$

Innen inverz Laplace-transzformációval

$$y(x) = \frac{1}{3} + e^x\left(\frac{5}{3}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{10}{3\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}x)\right)$$
$$z(x) = \frac{2}{3} + e^x\left(-\frac{5}{3}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}x)\right).$$

13. 3. Vizsga, 2018 január 10.

2. Feladat Oldjuk meg az alábbi kezdeti-érték feladatot!

$$y' + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} y = e^{x-\operatorname{arsh}(x)}, \quad y'(0) = 0$$

Mego.: Elsőrendű inhomogén lineáris egyenlet. A megfelelő homogén egyenlet:

$$Y' + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} Y = 0,$$

ekvivalens alakban

$$\ln|Y|' = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

amelynek megoldása

$$Y(x) = Ce^{-\operatorname{arsh}(x)}.$$

Az inhomogén egyenlet megoldásához változtassunk a C állandót: $C \rightsquigarrow C(x)$. Ekkor a kapott egyenlet:

$$C'(x)e^{-\operatorname{arsh}(x)} = e^{x-\operatorname{arsh}(x)},$$

ahonnan

$$C(x) = e^x + C,$$

ahol C állandó. A kezdeti feltételből:

$$(e^0 + C)e^{-\operatorname{arsh}(0)} = 0,$$

tehát $C = -1$. A keresett partikuláris megoldás:

$$y(x) = (e^x - 1)e^{-\operatorname{arsh}(x)}.$$

3. Feladat Oldjuk meg Laplace-transzformációval!

$$y^{(4)} - 4y'' + 4y = 1,$$
$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0.$$

Mego.: Legyen $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$, ekkor

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s)$$
$$\mathcal{L}\{y^{(4)}\} = s^4 Y(s),$$

és a transzformált egyenlet:

$$(s^4 - 4s^2 + 4)Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Ennek megoldása:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-\sqrt{2})^2(s+\sqrt{2})^2},$$

ami parciális tört alakban:

$$Y = \frac{A}{s} + B\frac{1}{s-\sqrt{2}} + C\frac{1}{(s-\sqrt{2})^2} + D\frac{1}{s+\sqrt{2}} + E\frac{1}{(s+\sqrt{2})^2}.$$

A kapott egyenletrendszer megoldása:

$$A = \frac{1}{4} \qquad B = -\frac{1}{8} \qquad C = \frac{1}{8\sqrt{2}}$$
$$D = -\frac{1}{8} \qquad E = -\frac{1}{8\sqrt{2}}$$

Innen inverz Laplace-transzformációval

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8}e^{\sqrt{2}x} + \frac{1}{8\sqrt{2}}xe^{\sqrt{2}x} - \frac{1}{8}e^{-\sqrt{2}x} - \frac{1}{8\sqrt{2}}xe^{-\sqrt{2}x} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cosh(\sqrt{2}x) + \frac{1}{4\sqrt{2}}x\sinh(\sqrt{2}x). \end{aligned}$$

14. 4. Vizsga, 2018 június 6.

2. Feladat Oldja meg a következő kezdeti-érték feladatot!

$$y'(x) = y(x) - 2y^2(x), \quad y(0) = 1$$

Mego.: Szétválasztjuk a változókat:

$$\frac{y'}{y(1-2y)} = 1,$$

amit x szerint integrálva

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(1-2y)} = x + c$$

valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén. A bal oldalon álló racionális törtfüggvényt részlettörtekre bontjuk:

$$\frac{1}{y(1-2y)} = \frac{1}{y} + \frac{2}{1-2y},$$

ahonnan

$$x + c = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{1-2y}\right) \mathrm{d}y = \ln|y| - \ln|1-2y| = \ln\left|\frac{y}{1-2y}\right|.$$

Innen

$$Ce^x = \frac{y}{1-2y}$$

valamely $C \in \mathbb{R}$ esetén. A kezdeti értékből kapjuk, hogy $C = -1$. Innen kifejezve y-t, azt kapjuk hogy

$$y(x) = -\frac{e^x}{1-2e^x}.$$

3. Feladat Oldja meg Laplace-transzformációval!

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= x + 2y + 1 \\
\dot{y} &= -2x + y - 2 \\
x(0) &= -1 \\
y(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Mego.: A szokásos jelölésekkel

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\dot{x}\} &= sX(s) + 1 \\
\mathcal{L}\{\dot{y}\} &= sY(s),
\end{aligned}$$

és a transzformált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
(s-1)X(s) - 2Y(s) &= -1 + \frac{1}{s} \\
2X(s) + (s-1)Y(s) &= -\frac{2}{s}.
\end{aligned}$$

A rendszer megoldása:

$$X(s) = -\frac{1}{s}, \quad Y(s) = 0,$$

ahonnan inverz Laplace-transzformációval

$$x(t) = -1, \quad y(t) = 0.$$