Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

1. feladatsor: Vektorfüggvények deriválása

---

1. Tekintsük azt az $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezést, ami az $(1,0)$ vektort az $(1,0,-2)$ vektorba, a $(0,1)$ vektort pedig a $(-2,10,-1)$ vektorba viszi. Mi a mátrixa a standard bázisban? Tekintsük $\mathbb{R}^2$-ben az $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ és $(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$ vektorokat, $\mathbb{R}^3$-ben pedig az $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}),(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ és $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ vektorokat. Ellenőrizzük, hogy ezek ortonormált bázisok és írjuk fel L mátrixát ezekre nézve is.
2. Tegyük fel, hogy egy M mátrix antiszimmetrikus része
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Határozzuk meg OMO^{-1} antiszimmetrikus részét, ha
   a) O az $x-y$ síkra való tükrözés mátrixa;
   b) O az x tengely körüli α szögű forgatás mátrixa.

   Hogyan változik az antiszimmetrikus részből képzett vektor a két esetben?
3. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$. Határozzuk meg a $\operatorname{grad} f$ vektormezőt és a $\triangle f$ skalármezőt.
4. Legyen $f_1(x,y) = e^x \cos y$ és $f_2(x,y) = e^x \sin y$. Számoljuk ki a $\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2$ vektormezőket és a $\triangle f_1, \triangle f_2$ skalármezőket.
5. Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, és legyen $\mathbf{v}(x,y,z) = f(\sqrt{x^2+y^2})(-y\mathbf{i}+x\mathbf{j})$. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ minden pontban párhuzamos a $\mathbf{k}$ vektorral és nagysága csak a z tengelytől mért távolságtól függ.
6. Egy $\mathbf{v}$ vektormező rotációja $\operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,z) = (y^3-2xyz)\mathbf{i} + (-2xz^2)\mathbf{j} + (2x^3+yz^2)\mathbf{k}$. Írjuk fel $O \circ \mathbf{v} \circ O^{-1}$ rotációját, ha O az $x=y$ síkra való tükrözés.
7. Bizonyítsuk be az alábbi Leibniz-szabályokat:
   a) $\operatorname{grad}(fg) = (\operatorname{grad} f)g + f \operatorname{grad} g$
   b) $\triangle(fg) = (\triangle f)g + 2(\operatorname{grad} f)\cdot(\operatorname{grad} g) + f(\triangle g)$

További gyakorló feladatok

8. Számoljuk ki a sík α szögű forgatásának $R(\alpha)$ mátrixát és ellenőrizzük ennek segítségével a szögfüggvényekre vonatkozó addíciós képleteket. Legyen A egy lineáris leképezés (2×2-es) mátrixa a standard bázisban. Hogyan változik az antiszimmetrikus rész mátrixa, ha az α szöggel pozitív irányban elforgatott bázisban írjuk fel? És ha a két bázisvektort felcseréljük?
9. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitikus függvény, és definiáljuk az f_1, f_2 síkbeli skalármezőket a következő módon: $f_1(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ és $f_2(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{grad} f_2$ minden pontban $\operatorname{grad} f_1$ elforgatottja $\pi/2$ szöggel, és $\triangle f_1 = \triangle f_2 = 0$.
10. Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, és legyen $\mathbf{v}(x,y,z) = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$.
11. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat ($f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u},\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$):
    a) $\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \operatorname{grad}(f)\cdot\mathbf{u} + f\operatorname{div}(\mathbf{u})$
    b) $\operatorname{rot}(f\mathbf{u}) = \operatorname{grad}(f)\times\mathbf{u} + f\operatorname{rot}(\mathbf{u})$
    c) $\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \operatorname{rot}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}(\mathbf{v})$