# Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

# 10. feladatsor: Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek (megoldás)

---

1. Határozzuk meg az $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ függvények Wronski-determinánsát.

   *Megoldás.* A megadott függvények $e^{\lambda x}f(x)$ alakúak, ezek deriváltjait a Leibniz-szabály alkalmazásával állíthatjuk elő:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{\lambda x}f(x) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\lambda^i f^{(n-i)}(x)e^{\lambda x} = f^{(n)}(x)e^{\lambda x} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\lambda^i f^{(n-i)}(x)e^{\lambda x}.$$

   Ebben az alakban láthatjuk, hogy az összegben megjelenő tagok mindegyike előáll $e^{\lambda x}f(x)$ legfeljebb $n-1$-edik deriváltjainak lineáris kombinációjaként, ahol az együtthatók $f$-től nem függnek. Így például

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} e^{\lambda x}f_1(x) & e^{\lambda x}f_2(x) \\ (e^{\lambda x}f_1(x))' & (e^{\lambda x}f_2(x))' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} e^{\lambda x}f_1(x) & e^{\lambda x}f_2(x) \\ \lambda e^{\lambda x}f_1(x) + e^{\lambda x}f_1'(x) & \lambda e^{\lambda x}f_2(x) + e^{\lambda x}f_2'(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} e^{\lambda x}f_1(x) & e^{\lambda x}f_2(x) \\ e^{\lambda x}f_1'(x) & e^{\lambda x}f_2'(x) \end{vmatrix} \\
&= e^{2\lambda x}\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

   Hasonlóan általában is elérhető sorműveletekkel, hogy csak $f_i^{(j)}(x)$ elemek maradjanak a determinánsban:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda x}f_1(x) & \cdots & e^{\lambda x}f_k(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}e^{\lambda x}f_1(x) & \cdots & \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}e^{\lambda x}f_k(x) \end{vmatrix} = e^{k\lambda x}\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \cdots & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

   A megadott függvények Wronski-determinánsa tehát

$$W(x) = e^{k\lambda x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{k-1} \\ 0 & 1 & 2x & \cdots & (k-1)x^{k-2} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & (k-1)(k-2)x^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (k-1)! \end{vmatrix} = e^{k\lambda x}\prod_{n=0}^{k-1} n!.$$

   Azt is észrevehetjük, hogy a megadott függvények az

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right)^k y(x) = 0,$$

   azaz

$$\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}(-\lambda)^{k-n}y^{(n)} = 0$$

lineáris differenciálegyenlet megoldásterének bázisát alkotját. Elsőrendű egyenletrendszerré alakítva $\mathbf{y} = (y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ bevezetésével az egyenlet

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\binom{k}{1}(-\lambda)^{k-1} & -\binom{k}{2}(-\lambda)^{k-2} & -\binom{k}{3}(-\lambda)^{k-3} & \cdots & -\binom{k}{k-1}(-\lambda) \end{bmatrix} \mathbf{y} = A\mathbf{y}$$

lesz, tehát a Wronski-determinánsra a $W' = (\operatorname{Tr} A)W = k\lambda W$ differenciálegyenlet teljesül, emiatt $W(x) = e^{k\lambda x}W(0)$.

2. A Wronski-determináns segítségével határozzuk meg a $4xy''+2y'+y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását, ha tudjuk, hogy $\cos\sqrt{x}$ megoldja az egyenletet.

   *Megoldás.* Az $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ differenciálegyenlet ekvivalens az

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0(x)}{a_2(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

   elsőrendű egyenletrendszerrel, ennek Wronski-determinánsa teljesíti a

$$W' = -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}W$$

   egyenletet. Most $a_1(x) = 2$ $a_2(x) = 4x$, tehát $W' = -\frac{1}{2x}W$, amiből $W(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}$. Másrészt ha $y_1$ és $y_2$ az eredeti egyenlet két megoldása, akkor a

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

   függvény ugyanezt a differenciálegyenletet teljesíti. Ha $y_1(x) = \cos\sqrt{x}$ ismert, akkor ez $y_2$-re nézve elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletet jelent, amit az állandók variálásának módszerével oldhatunk meg. A konstrukció miatt $y_1$ megoldja a homogén egyenletet, tehát az inhomogén egyenlet megoldását $c(x)y_1(x)$ alakban keressük.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & c(x)y_1(x) \\ y_1'(x) & (c(x)y_1(x))' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & c(x)y_1(x) \\ y_1'(x) & c(x)y_1'(x) + c'(x)y_1(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & c'(x)y_1(x) \end{vmatrix} = c'(x)y_1(x)^2$$

   felhasználásával és pl. $C = 1$ választásával most

$$c'(x) = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}},$$

   tehát

$$c(x) = 2\tan\sqrt{x}.$$

   Így $y_2(x) = 2\sin\sqrt{x}$, és az általános megoldás $A\cos\sqrt{x} + B\sin\sqrt{x}$.

3. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását.
   a) $y^{(4)} - 2y''' - y'' + 2y' = 0$
   b) $y'' - 4y' + 4y = 0$
   c) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
   d) $y'' - 4y' + 29y = 0$

e) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

*Megoldás.* Az egyenletekbe az $e^{\lambda x}$ függvényt helyettesítünk és elosztjuk mindkét oldalt ugyanezzel a függvénnyel. A bal oldal így $\lambda$ egy polinomja lesz (karakterisztikus polinom), ha ennek $\lambda_i$ gyöke $m_i$ multiplicitással, akkor az $e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \dots, x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}$ függvények megoldják a differenciálegyenletet. Ez pontosan annyi függvényt határoz meg, mint amennyi az egyenlet rendje, és a függvények a megoldástér egy bázisát alkotják. (Ha $\lambda = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gyök $m$ multiplicitással, akkor $\overline{\lambda}$ is az ugyanilyen multiplicitással, ezek alkalmas lineáris kombinációi valósak: $e^{ax}\cos bx, \dots, x^{m-1}e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx, \dots, x^{m-1}e^{ax}\sin bx$)

a) A karakterisztikus polinom $\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = (\lambda+1)\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$, az általános megoldás $y(x) = Ae^{-x} + B + Ce^{x} + De^{2x}$.

b) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$, az általános megoldás $y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$.

c) A karakterisztikus polinom $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3$, az általános megoldás $y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Cx^2e^{-x}$.

d) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 4\lambda + 29$, ennek gyökei

$$\frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 29}}{2} = 2 \pm \sqrt{-25} = 2 \pm 5i,$$

az általános megoldás $y(x) = Ae^{2x}\cos 5x + Be^{2x}\sin 5x$.

e) A karakterisztikus polinom $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2 = (\lambda+i)^2(\lambda-i)^2$, az általános megoldás $y(x) = A\cos x + Bx\cos x + C\sin x + Dx\sin x$.

4. Legyenek $\omega \geq 0$ és $\alpha \geq 0$ valós paraméterek. Oldjuk meg az $y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. Miben különbözik a megoldás $\alpha > \omega$ és $\alpha < \omega$ esetén?

*Megoldás.* A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2\lambda$, ennek gyökei

$$\frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega^2}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}.$$

Ha $\alpha > \omega$, akkor mindkét gyök valós (negatív), az általános megoldás

$$y(x) = Ae^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega^2})x} + Be^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega^2})x}.$$

A kezdeti feltételből kell $A$ és $B$ értékét meghatározni:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A + B \\ 0 &= y'(0) = (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2})A + (-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2})B, \end{aligned}$$

ebből

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} \\ B &= \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}. \end{aligned}$$

A kapott megoldás monoton csökken, exponenciálisan 0-hoz tart ($y(x) \leq Ce^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega^2})x}$). Ha $\alpha < \omega$, akkor viszont komplex gyököket kapunk, az általános megoldás

$$y(x) = Ae^{-\alpha x}\cos(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}x) + Be^{-\alpha x}\sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}x).$$

A kezdeti feltételből kell $A$ és $B$ értékét meghatározni:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A \\ 0 &= y'(0) = -\alpha A + \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} B, \end{aligned}$$

ebből

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}. \end{aligned}$$

Ilyenkor a megoldás a 0 körül oszcillál. Ha $\alpha > 0$, akkor exponenciálisan 0-hoz tart ($|y(x)| \leq Ce^{-\alpha x}$), ha viszont $\alpha = 0$, akkor periodikus.
Meg kell még vizsgálni az $\alpha = \omega$ esetet. Ekkor $-\alpha$ kétszeres valós gyök, az általános megoldás $y(x) = Ae^{-\alpha x} + Bxe^{-\alpha x}$. A kezdeti feltételből kell $A$ és $B$ értékét meghatározni:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A \\ 0 &= y'(0) = -\alpha A + B, \end{aligned}$$

ebből $A = 1$ és $B = \alpha$. Ekkor a megoldás szigorúan monoton csökken, szintén exponenciálisan 0-hoz tart, de kicsivel lassabban mint $e^{-\alpha x}$ ($|y(x)| \leq Cxe^{-\alpha x}$). Ezt a megoldást az előző két eset bármelyikéből megkaphattuk volna $\omega \to \alpha$ határátmenettel.

5. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását.
   a) $y'' - 4y' - 12y = xe^x$
   b) $y'' - 4y' - 12y = xe^{-2x}$
   c) $y''' - 4y'' + 4y' = x^2 + e^{2x}$
   d) $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$

   *Megoldás.* Ha az inhomogén tag $p(x)e^{\lambda x}$ alakú, ahol $p(x)$ egy $d$ fokú polinom és $\lambda$ a karakterisztikus polinomnak $m$-szeres gyöke ($m = 0$ ha nem gyök), akkor az egyenletnek létezik $q(x)x^m e^{\lambda x}$ alakú megoldása, ahol $q(x)$ szintén $d$ fokú polinom. (Komplex gyök esetén cos, sin előállítható a komplex exponenciálisokból.)

   a) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = (\lambda + 2)(\lambda - 6)$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{6x}$. Nincsen rezonancia, $(C_0 + C_1 x)e^x$ alakú megoldást keresünk. Ezt behelyettesítve az

   $$\begin{aligned} xe^x &= 2C_1 e^x + (C_0 + C_1 x)e^x - 4(C_1 e^x + (C_0 + C_1 x)e^x) - 12(C_0 + C_1 x)e^x \\ &= (-15C_0 - 2C_1)e^x + (-15C_1)xe^x \end{aligned}$$

   egyenlethez jutunk, ami akkor teljesül minden $x$-re, ha $C_1 = -\frac{1}{15}$, $C_2 = \frac{2}{225}$. Tehát az általános megoldás

   $$y(x) = \frac{2}{225}e^x - \frac{1}{15}xe^x + Ae^{-2x} + Be^{6x}.$$

   b) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = (\lambda + 2)(\lambda - 6)$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{6x}$. Külső rezonancia van, $(C_0 + C_1 x)xe^{-2x} = (C_0 x + C_1 x^2)e^{-2x}$ alakú megoldást keresünk. Ezt behelyettesítve az

   $$(-8C_0 + 2C_1)e^{-2x} - 16C_1 xe^{-2x} = xe^{-2x}$$

   egyenlet adódik, ebből $C_1 = -\frac{1}{16}$ és $C_2 = -\frac{1}{64}$, így az általános megoldás

   $$y(x) = -\frac{1}{64}xe^{-2x} - \frac{1}{16}x^2 e^{-2x} + Ae^{-2x} + Be^{6x}.$$

c) A karakterisztikus polinom $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda - 2)^2$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = A + Be^{2x} + Cxe^{2x}$ (belső rezonancia). Mindkét inhomogén tag miatt külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet megoldását $C_0x + C_1x^2 + C_2x^3 + D_0x^2e^{2x}$ alakban keressük. Behelyettesítve:

$$(4C_0 - 8C_1 + 6C_2) + (8C_1 - 24C_2)x + 12C_2x^2 + 4D_0e^{2x} = x^2 + e^{2x},$$

amiből $D_0 = \frac{1}{4}$, $C_2 = \frac{1}{12}$, $C_1 = \frac{1}{4}$, $C_0 = \frac{3}{8}$. Az általános megoldás

$$y(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2e^{2x} + A + Be^{2x} + Cxe^{2x}.$$

d) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - 1 + 2i)(\lambda - 1 - 2i)$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x$. Külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet megoldását $C_0xe^x \cos 2x + D_0xe^x \sin 2x$ alakban kereshetjük. Behelyettesítve:

$$4D_0e^x \cos 2x - 4C_0e^x \sin 2x = e^x \sin 2x,$$

tehát $C_0 = -\frac{1}{4}$ és $D_0 = 0$. Az általános megoldás

$$y(x) = -\frac{1}{4}xe^x \cos 2x + Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x.$$

## További gyakorló feladatok

6. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -e^{2x}y_1 + y_2 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszernek létezik nem korlátos megoldása.

*Megoldás.* Az egyenletrendszer mátrix alakban $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$, ahol

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -e^{2x} & 1 \end{bmatrix}.$$

Két lineárisan független megoldásból mátrixot képezhetünk, ennek determinánsa a $W(x)$ Wronski-determináns. A $W'(x) = \operatorname{Tr} A(x)W(x) = W(x)$ egyenlet megoldása $W(x) = Ce^x$, ahol $C \neq 0$ állandó. Ha minden megoldás korlátos lenne, akkor a belőlük képzett determináns is korlátos lenne, de $e^x$ nem az. Tehát létezik nem korlátos megoldás.

7. Határozzuk meg az $y'' - y' - e^{2x}y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását, ha tudjuk, hogy $e^{e^x}$ megoldás.

*Megoldás.* A Wronski-determinánsra $W' = W$ teljesül, tehát $W = Ce^x$. $y_1(x) = e^{e^x}$ megoldás, egy másikat $y_2(x) = c(x)y_1(x)$ alakban keressük ($C = 1$ feltehető):

$$e^x = \begin{vmatrix} y_1(x) & c(x)y_1(x) \\ y_1'(x) & (c(x)y_1(x))' \end{vmatrix} = c'(x)y_1(x)^2,$$

tehát

$$c'(x) = \frac{e^x}{e^{2e^x}}.$$

Ezt integrálva

$$c(x) = -\frac{1}{2}e^{-2e^x} + C$$

adódik, az általános megoldás

$$y(x) = C_1e^{e^x} + C_2e^{-e^x}.$$

8. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását.
   a) $y'' + 2y' + 10y = 0$
   b) $y'' - 12y' + 27y = 0$
   c) $y'' - 10y' + 25y = 0$
   d) $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$
   e) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
   f) $y^{(n)} - y = 0$, ahol $n \geq 1$ egész

   *Megoldás.*
   a) A karakterisztikus polinom $\lambda^2+2\lambda+10 = (\lambda+1-3i)(\lambda+1+3i)$, az általános megoldás $y(x) = Ae^{-x}\cos 3x + Be^{-x}\sin 3x$.
   b) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 12\lambda + 27 = (\lambda - 3)(\lambda - 9)$, az általános megoldás $y(x) = Ae^{3x} + Be^{9x}$.
   c) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$, az általános megoldás $y(x) = Ae^{5x} + Bxe^{5x}$.
   d) A karakterisztikus polinom $\lambda^4+18\lambda^2+81 = (\lambda^2+9)^2 = (\lambda+3i)^2(\lambda-3i)^2$, az általános megoldás $y(x) = A\cos 3x + B\sin 3x + Cx\cos 3x + Dx\sin 3x$.
   e) A karakterisztikus polinom $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3$, az általános megoldás $y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + Cx^2e^{2x}$.
   f) A karakterisztikus polinom

$$\lambda^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(\lambda - e^{2\pi i\frac{k}{n}}).$$

   Ha $n$ páratlan, akkor az általános megoldás

$$y(x) = Ae^x + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(C_k e^{\cos\left(2\pi i\frac{k}{n}\right)}\cos e^{\sin\left(2\pi i\frac{k}{n}\right)} + D_k e^{\cos\left(2\pi i\frac{k}{n}\right)}\sin e^{\sin\left(2\pi i\frac{k}{n}\right)}\right),$$

   ha $n$ páros, akkor pedig

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(C_k e^{\cos\left(2\pi i\frac{k}{n}\right)}\cos e^{\sin\left(2\pi i\frac{k}{n}\right)} + D_k e^{\cos\left(2\pi i\frac{k}{n}\right)}\sin e^{\sin\left(2\pi i\frac{k}{n}\right)}\right).$$

9. Legyenek $\omega_0 > 0$ és $\omega \geq 0$ valós paraméterek. Oldjuk meg az $y'' + \omega_0^2 y = \sin(\omega x)$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. Mi történik, ha $\omega = \omega_0$?

   *Megoldás.* Az egyenlet inhomogén lineáris, a hozzá tartozó homogén egyenlet $y'' + \omega_0^2 y$. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + \omega_0^2 = (\lambda - i\omega_0)(\lambda + i\omega_0)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = A\cos(\omega_0 x) + B\sin(\omega_0 x)$. Ha $\omega \neq \omega_0$, akkor nincsen külső rezonancia, az inhomogén egyenlet megoldását $C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)$ alakban kereshetjük. Ezt behelyettesítve az egyenlet

$$-\omega^2 C\cos(\omega x) - \omega^2 D\sin(\omega x) + \omega_0^2 C\cos(\omega x) + \omega_0^2 D\sin(\omega x) = \sin(\omega x),$$

   amiből $C(\omega_0^2 - \omega^2) = 0$, $D(\omega_0^2 - \omega^2) = 1$. Az általános megoldás

$$y(x) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega x) + A\cos(\omega_0 x) + B\sin(\omega_0 x).$$

   Az $A$, $B$ paraméterek értékét úgy kell megválasztani, hogy a kezdeti feltétel teljesüljön.

$$y'(x) = \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega x) - A\omega_0\sin(\omega_0 x) + B\omega_0\cos(\omega_0 x)$$

felhasználásával a feltétel

$$\begin{aligned}
0 &= y(0) = A \\
0 &= y'(0) = \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + B\omega_0,
\end{aligned}$$

tehát $A = 0$ és $B = -\frac{\omega}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)}$, a kezdetiérték-probléma megoldása

$$y(x) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega x) - \frac{\omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin(\omega_0 x) = \frac{\omega_0 \sin(\omega x) - \omega \sin(\omega_0 x)}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Ha $\omega = \omega_0$, akkor külső rezonancia van, tehát az inhomogén egyenletnek $Cx\cos(\omega_0 x) + Dx\sin(\omega_0 x)$ alakban keressük a megoldását. Behelyettesítés után az egyenlet

$$2D\omega_0\cos(\omega_0 x) - 2C\omega_0\sin(\omega_0 x) = \sin(\omega_0 x),$$

tehát $C = -\frac{1}{2\omega_0}$ és $D = 0$. Az általános megoldás

$$y(x) = -\frac{1}{2\omega_0}x\cos(\omega_0 x) + A\cos(\omega_0 x) + B\sin(\omega_0 x).$$

A kezdeti feltételből

$$\begin{aligned}
0 &= y(0) = A \\
0 &= y'(0) = -\frac{1}{2\omega_0} + B\omega_0,
\end{aligned}$$

azaz $A = 0$ és $B = \frac{1}{2\omega_0^2}$. A kezdetiérték-probléma megoldása ekkor

$$y(x) = -\frac{1}{2\omega_0}x\cos(\omega_0 x) + \frac{1}{2\omega_0^2}\sin(\omega_0 x).$$

Tehát külső rezonancia esetén a megoldás nem lesz korlátos, az első tag miatt lineárisan nő a rezgés amplitúdója. Ezt a megoldást az $\omega \neq \omega_0$ melletti megoldásból $\omega \to \omega_0$ határátmenettel is megkaphattuk volna.

10. Legyenek $\omega_1, \omega_2 \geq 0$ valós paraméterek. Oldjuk meg az $y^{(4)} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)y'' + \omega_1^2\omega_2^2 y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. Mi történik, ha $\omega_1 = \omega_2$?

*Megoldás.* Az egyenlet homogén lineáris állandó együtthatós, a karakterisztikus polinom $\lambda^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\lambda^2 + \omega_1^2\omega_2^2 = (\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^2 + \omega_2^2)$. Ha $\omega_1 \neq \omega_2$, akkor nincs rezonancia, az általános megoldás

$$y(x) = A\cos\omega_1 x + B\sin\omega_1 x + C\cos\omega_1 x + D\sin\omega_2 x.$$

Ennek deriváltjai:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= B\omega_1\cos\omega_1 - A\omega_1\sin\omega_1 x + D\omega_2\cos\omega_1 x - C\omega_1\sin\omega_1 x \\
y''(x) &= -A\omega_1^2\cos\omega_1 - B\omega_1^2\sin\omega_1 x - C\omega_2^2\cos\omega_1 x - D\omega_1^2\sin\omega_1 x \\
y'''(x) &= -B\omega_1^3\cos\omega_1 + A\omega_1^3\sin\omega_1 x - D\omega_2^3\cos\omega_1 x + C\omega_1^3\sin\omega_1 x.
\end{aligned}$$

A kezdeti feltétel alapján az együtthatókra az

$$\begin{aligned}
1 &= y(0) = A + C \\
0 &= y'(0) = \omega_1 B + \omega_2 D \\
0 &= y''(0) = -\omega_1^2 A - \omega_2^2 C \\
0 &= y'''(0) = -\omega_1^3 B - \omega_2^3 D
\end{aligned}$$

egyenletrendszer teljesül, ennek megoldása

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2-\omega_1^2} \\ B &= 0 \\ C &= -\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2-\omega_1^2} \\ D &= 0, \end{aligned}$$

tehát a kezdetiérték-probléma megoldása

$$y(x) = \frac{\omega_2^2 \cos\omega_1 x - \omega_1^2 \cos\omega_2 x}{\omega_2^2-\omega_1^2}.$$

Ha $\omega_1 = \omega_2 =: \omega$, akkor belső rezonancia van, tehát az általános megoldás

$$y(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x + Cx\cos\omega x + Dx\sin\omega x,$$

ebből hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$y(x) = \frac{1}{2}x\omega\sin\omega x + \cos\omega x.$$

Ez a megoldás egyébként azzal a függvénnyel is megegyezik, amit az $\omega_1 \neq \omega_2$ esetben kapottból $\omega_2 \to \omega_1$ határátmenettel kapunk.

11. Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-problémák megoldását.
 a) $y'' + 4y' + 8y = e^{-2x}\cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
 b) $y''' - 3y'' - y' + 3y = xe^{2x}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$
 c) $y''' - 3y'' - y' + 3y = xe^{-x}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$
 d) $y'' + 8y' + 16y = x^2e^{-4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

 *Megoldás.*
 a) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = (\lambda + 2 + 2i)(\lambda + 2 - 2i)$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-2x}\cos 2x + Be^{-2x}\sin 2x$. Külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását $y(x) = Cxe^{-2x}\cos 2x + Dxe^{-2x}\sin 2x$ alakban keressük, behelyettesítés után $C = 0$, $D = \frac{1}{4}$ adódik. Az általános megoldás és deriváltja

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{4}xe^{-2x}\sin 2x + Ae^{-2x}\cos 2x + Be^{-2x}\sin 2x \\ y'(x) &= \frac{1}{4}e^{-2x}\sin 2x - \frac{1}{2}xe^{-2x}\sin 2x + \frac{1}{2}xe^{-2x}\cos 2x \\ &\quad + (-2A+2B)e^{-2x}\cos 2x + (-2A-2B)e^{-2x}\sin 2x, \end{aligned}$$

 a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A \\ 0 &= y'(0) = -2A + 2B, \end{aligned}$$

 tehát $A = B = 1$.
 b) A karakterisztikus polinom $\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3)$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-x} + Be^{x} + Ce^{3x}$. Nincsen rezonancia, az inhomogén egyenlet megoldását $y(x) = (C_0 + C_1x)e^{2x}$ alakban keressük. Behelyettesítés után az

egyenlet $(-3C_0 - C_1 - 3C_1x)e^{2x} = xe^{2x}$, amiből $C_0 = \frac{1}{9}$ és $C_1 = -\frac{1}{3}$. Az általános megoldás és deriváltjai

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{9}e^{2x} - \frac{1}{3}xe^{2x} + Ae^{-x} + Be^{x} + Ce^{3x} \\ y'(x) &= -\frac{1}{9}e^{2x} - \frac{2}{3}xe^{2x} - Ae^{-x} + Be^{x} + 3Ce^{3x} \\ y''(x) &= -\frac{8}{9}e^{2x} - \frac{4}{3}xe^{2x} + Ae^{-x} + Be^{x} + 9Ce^{3x}, \end{aligned}$$

a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned} 0 = y(0) &= \frac{1}{9} + A + B + C \\ 0 = y'(0) &= -\frac{1}{9} - A + B + 3C \\ 0 = y''(0) &= -\frac{8}{9} + A + B + 9C, \end{aligned}$$

ennek megoldása $A = \frac{1}{72}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{8}$.

c) A karakterisztikus polinom $\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3)$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-x} + Be^{x} + Ce^{3x}$. Külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet megoldását $y(x) = (C_0 + C_1x)xe^{-x}$ alakban keressük. Behelyettesítés után az egyenlet $(8C_0 - 12C_1 + 16C_1x)e^{-x} = xe^{-x}$, amiből $C_0 = \frac{3}{32}$ és $C_1 = \frac{1}{16}$. Az általános megoldás és deriváltjai

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{3}{32}xe^{-x} + \frac{1}{16}x^2e^{-x} + Ae^{-x} + Be^{x} + Ce^{3x} \\ y'(x) &= \frac{3}{32}e^{-x} + \frac{1}{32}xe^{-x} - \frac{1}{16}x^2e^{-x} - Ae^{-x} + Be^{x} + 3Ce^{3x} \\ y''(x) &= -\frac{1}{16}e^{-x} - \frac{5}{32}xe^{-x} + \frac{1}{16}x^2e^{-x} + Ae^{-x} + Be^{x} + 9Ce^{3x}, \end{aligned}$$

a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned} 0 = y(0) &= A + B + C \\ 0 = y'(0) &= \frac{3}{32} - A + B + 3C \\ 0 = y''(0) &= -\frac{1}{16} + A + B + 9C, \end{aligned}$$

ennek megoldása $A = \frac{7}{128}$, $B = -\frac{1}{16}$, $C = \frac{1}{128}$.

d) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda+4)^2$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-4x} + Bxe^{-4x}$ (belső rezonancia). Külső rezonancia is van, az inhomogén egyenlet megoldását $y(x) = (C_0 + C_1x + C_2x^2)x^2e^{-4x}$ alakban keressük. Behelyettesítve a kapott egyenlet $(2C_0 + 6C_1x + 12C_2x^2)e^{-4x} = x^2e^{-4x}$, tehát $C_0 = C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{12}$. Az általános megoldás és deriváltja

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{12}x^4e^{-4x} + Ae^{-4x} + Bxe^{-4x} \\ y'(x) &= \frac{1}{3}x^3e^{-4x} - \frac{1}{3}x^4e^{-3x} + (-4A + B)e^{-4x} - 4Bxe^{-4x}, \end{aligned}$$

a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = A \\ 1 &= y'(0) = -4A + B, \end{aligned}$$

ennek megoldása $A = 0$, $B = 1$.

12. Legyenek $\omega_0, \omega, \alpha > 0$ valós paraméterek. Keressük meg az $y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = \sin(\omega x)$ differenciálegyenletet periodikus megoldását ($y(x) = C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)$ alakban). Milyen $\omega$ mellett maximális $y$ illetve $y'$ amplitúdója?

*Megoldás.* A homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának gyökei $\lambda_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, ezeknek mindig negatív a valós része, tehát a homogén egyenletnek nincs nemtriviális periodikus megoldása. Nincsen külső rezonancia, mert az inhomogén tagban a $\pm i\omega x$ kitevők tisztán képzetesek. A periodikus megoldás ezek szerint csak $y(x) = C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)$ alakú lehet.

$$\begin{aligned}
y'(x) &= D\omega\cos(\omega x) - C\omega\sin(\omega x)\\
y''(x) &= -C\omega^2\cos(\omega x) - D\omega^2\sin(\omega x)
\end{aligned}$$

felhasználásával behelyettesítés után az egyenlet

$$(\omega_0^2 C + 2\alpha\omega D - \omega^2 C)\cos(\omega x) + (\omega_0^2 D - 2\alpha\omega C - \omega^2 D)\cos(\omega x) = \sin(\omega x)$$

lesz. Ebből

$$\begin{aligned}
C &= -\frac{2\alpha\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}\\
D &= -\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}.
\end{aligned}$$

Érdemes a kapott megoldást $A\sin(\omega x - \varphi)$ alakba is átírni, ekkor $A$ a rezgés amplitúdója, $\varphi$ pedig az inhomogén taghoz képest mért fázis. Az addíciós képlet felhasználásával $A = \sqrt{C^2 + D^2}$ és $\varphi = \arccos\frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}}$, tehát

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}\\
\varphi &= \arccos\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}.
\end{aligned}$$

Függvényvizsgálattal meggyőződhetünk róla, hogy adott $\omega_0, \alpha$ mellett az amplitúdó akkor maximális, ha $\omega = \sqrt{\max\{0, \omega_0^2 - 2\alpha^2\}}$.
$y' = A\omega\cos(\omega x - \varphi)$ amplitúdója $A\omega$, ez $\omega = \omega_0$ esetén maximális.