Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

10. feladatsor: Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek

---

1. Határozzuk meg az $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ függvények Wronski-determinánsát.
2. A Wronski-determináns segítségével határozzuk meg a $4xy''+2y'+y=0$ differenciálegyenlet általános megoldását, ha tudjuk, hogy $\cos\sqrt{x}$ megoldja az egyenletet.
3. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását.
   a) $y^{(4)} - 2y''' - y'' + 2y' = 0$
   b) $y'' - 4y' + 4y = 0$
   c) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
   d) $y'' - 4y' + 29y = 0$
   e) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$
4. Legyenek $\omega \geq 0$ és $\alpha \geq 0$ valós paraméterek. Oldjuk meg az $y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. Miben különbözik a megoldás $\alpha > \omega$ és $\alpha < \omega$ esetén?
5. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását.
   a) $y'' - 4y' - 12y = xe^x$
   b) $y'' - 4y' - 12y = xe^{-2x}$
   c) $y''' - 4y'' + 4y' = x^2 + e^{2x}$
   d) $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$

További gyakorló feladatok

6. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -e^{2x}y_1 + y_2 \end{aligned}$$

   differenciálegyenlet-rendszernek létezik nem korlátos megoldása.
7. Határozzuk meg az $y'' - y' - e^{2x}y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását, ha tudjuk, hogy e^{e^x} megoldás.
8. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását.
   a) $y'' + 2y' + 10y = 0$
   b) $y'' - 12y' + 27y = 0$
   c) $y'' - 10y' + 25y = 0$
   d) $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$
   e) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
   f) $y^{(n)} - y = 0$, ahol $n \geq 1$ egész
9. Legyenek $\omega_0 > 0$ és $\omega \geq 0$ valós paraméterek. Oldjuk meg az $y'' + \omega_0^2 y = \sin(\omega x)$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. Mi történik, ha $\omega = \omega_0$?
10. Legyenek $\omega_1, \omega_2 \geq 0$ valós paraméterek. Oldjuk meg az $y^{(4)} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)y'' + \omega_1^2\omega_2^2 y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. Mi történik, ha $\omega_1 = \omega_2$?
11. Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-problémák megoldását.
   a) $y'' + 4y' + 8y = e^{-2x}\cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

b) $y''' - 3y'' - y' + 3y = xe^{2x}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$
c) $y''' - 3y'' - y' + 3y = xe^{-x}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$
d) $y'' + 8y' + 16y = x^2 e^{-4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

12. Legyenek $\omega_0, \omega, \alpha > 0$ valós paraméterek. Keressük meg az $y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = \sin(\omega x)$ differenciálegyenletet periodikus megoldását ($y(x) = C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)$ alakban). Milyen ω mellett maximális y illetve y' amplitúdója?