Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

11. feladatsor: Laplace-transzformáció (megoldás)

---

1. Határozzuk meg az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.
   a) $f(x) = \cos^2 x$
   b)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a \leq x < b \\ 1 & \text{ha } x \geq b \end{cases},$$

   ahol $0 < a < b$.

   Megoldás. Mindkét függvény korlátos, tehát $\operatorname{Re} z > 0$ esetén létezik $\mathcal{L}f(z)$, de $\operatorname{Re} z \leq 0$ esetén nem lesz konvergens az integrál.
   a) Használhatjuk a linearizáló formulát: $f(x) = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, tehát

$$\mathcal{L}f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{z}{z^2+b^2}.$$

   b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(z) &= \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b e^{-zx}\frac{x-a}{b-a}\,\mathrm{d}x + \int_b^\infty e^{-zx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{-zx}x\,\mathrm{d}x + \frac{-a}{b-a}\int_a^b e^{-zx}\,\mathrm{d}x + \frac{e^{-bz}}{z} \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\left[\frac{e^{-zx}}{-z}x\right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{e^{-zx}}{-z}\,\mathrm{d}x\right) + \frac{-a}{b-a}\int_a^b e^{-zx}\,\mathrm{d}x + \frac{e^{-bz}}{z} \\
&= \frac{ae^{-az}-be^{-bz}}{(b-a)z} + \left(\frac{1}{(b-a)z} + \frac{-a}{b-a}\right)\frac{e^{-az}-e^{-bz}}{z} + \frac{e^{-bz}}{z} = \frac{e^{-az}-e^{-bz}}{(b-a)z^2}.
\end{aligned}$$

2. Határozzuk meg Laplace-transzformációval az $y'''+y=1$ differenciálegyenlet $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

   Megoldás. Legyen $Y = \mathcal{L}y$, ekkor $\mathcal{L}y'''(z) = z^3Y(z) - z^2y(0) - zy'(0) - y''(0) = z^3Y(z)$. A differenciálegyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk, majd $Y(z)$-re megoldjuk:

$$z^3Y(z) + Y(z) = \frac{1}{z},$$

   tehát

$$Y(z) = \frac{1}{z(z^3+1)} = \frac{1}{z(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}\frac{1}{z+1} - \frac{2}{3}\frac{z-\frac{1}{2}}{(z-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}},$$

   tehát a megoldás

$$y(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{3} - \frac{2}{3}e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

3. Laplace-transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az $xy'' + 2y' + xy = 0$ differenciálegyenletet.

   Megoldás. Legyen $Y = \mathcal{L}y$ és $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$ (paraméterek, mert az általános megoldást keressük). Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(xy)(z) &= -Y'(z)\\
\mathcal{L}y'(z) &= zY(z) - y_0\\
\mathcal{L}(xy'')(z) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^2Y(z) - zy_0 - y_0') = -2zY(z) - z^2Y'(z) + y_0.
\end{aligned}$$

   Behelyettesítve

$$\begin{aligned}
0 &= -2zY(z) - z^2Y'(z) + y_0 + 2(zY(z) - y_0) - Y'(z)\\
&= -(z^2+1)Y'(z) - y_0,
\end{aligned}$$

   ami egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet $Y(z)$-re. Elég azonban $-Y'(z)$-t kifejezni, mivel ez $xy(x)$ Laplace-transzformáltja.

$$-Y'(z) = \frac{y_0}{1+z^2}$$

   alapján $xy(x) = y_0 \sin x$, tehát

$$y(x) = y_0 \frac{\sin x}{x}$$

   Ez nem az általános megoldás, mert csak egy paraméter van benne. A másik megoldást $c(x)\frac{\sin x}{x}$ alakban keresve a

$$2c'(x)\cos x + c''(x)\sin x = 0$$

   egyenletet kapjuk, amiből

$$\begin{aligned}
\frac{c''(x)}{c'(x)} &= -2\frac{\cos x}{\sin x}\\
(\ln c'(x))' &= (-2\ln\sin x)'\\
c'(x) &= \frac{C}{\sin^2 x}\\
c(x) &= -C\frac{\cos x}{\sin x},
\end{aligned}$$

   tehát az általános megoldás

$$y(x) = A\frac{\sin x}{x} + B\frac{\cos x}{x}.$$

4. Két nyugalomban lévő testet kezdetben nyújtatlan rugó köt össze. Az egyiket a $t_0 = 0$ pillanatban a rugóval párhuzamos állandó erővel gyorsítani kezdjük. Ha y_1, y_2 jelöli az egyes testek kezdeti helytől számított elmozdulását, akkor a mozgást meghatározó differenciálegyenlet-rendszer

$$\begin{aligned}
y_1'' &= y_2 - y_1 + f\\
y_2'' &= y_1 - y_2.
\end{aligned}$$

   Hogyan mozognak a $t_0 = 0$ pillanat után?

Megoldás. Legyen $Y_1 = \mathcal{L}y_1$ és $Y_2 = \mathcal{L}y_2$. A kezdeti feltétel $y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = y_2'(0) = 0$, emiatt $(\mathcal{L}y_1'')(z) = z^2Y_1(z)$ és $(\mathcal{L}y_2'')(z) = z^2Y_2(z)$. Laplace-transzformáljuk az egyenletek mindkét oldalát:

$$\begin{aligned} z^2Y_1(z) &= Y_2(z) - Y_1(z) + \frac{f}{z} \\ z^2Y_2(z) &= Y_1(z) - Y_2(z). \end{aligned}$$

Ez egy lineáris egyenletrendszer $Y_1(z)$-re és $Y_2(z)$-re, a megoldás parciális törtekre bontva

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= \frac{f(1+z^2)}{z^3(z^2+2)} = \frac{f}{4}\left(\frac{2}{z^3} + \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+2}\right) \\ Y_2(z) &= \frac{f}{z^3(z^2+2)} = \frac{f}{4}\left(\frac{2}{z^3} - \frac{1}{z} + \frac{z}{z^2+2}\right). \end{aligned}$$

A kezdetiérték-probléma megoldását inverz Laplace-transzformációval kapjuk:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{f}{4}\left(t^2 + 1 - \cos(\sqrt{2}t)\right) \\ y_2(t) &= \frac{f}{4}\left(t^2 - 1 + \cos(\sqrt{2}t)\right). \end{aligned}$$

További gyakorló feladatok

5. Határozzuk meg az $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.
   a) $f(x) = x^{-1/2}$
   b) $f(x) = \operatorname{sgn}\sin(\pi x)$

   Megoldás.
   a) A Laplace-transzformált létezik, ha $z > 0$, mivel f integrálható $(0,1]$-en és korlátos $[1,\infty)$-en. $zx = u^2$, $\mathrm{d}x = \frac{2u}{z}\,\mathrm{d}u$ helyettesítéssel

   $$\int_0^\infty \frac{e^{-zx}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u}\frac{2u}{\sqrt{z}}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{z}}\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}}.$$

   b) f korlátos, tehát létezik Laplace-transzformált a pozitív valós részű számok félsíkján, de $|f(x)|$ majdnem mindenhol 1, tehát $\operatorname{Re} z \le 0$-ra nem létezik.
   A függvény értéke 1 ha $2k < x < 2k+1$ és -1 ha $2k+1 < x < 2k+2$ ($k \in \mathbb{Z}$), tehát

   $$\begin{aligned} \mathcal{L}f(z) &= \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^\infty \left(\int_{2k}^{2k+1} e^{-zx}\,\mathrm{d}x - \int_{2k+1}^{2k+2} e^{-zx}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{e^{-2kz} - e^{-(2k+1)z}}{z} - \frac{e^{-(2k+1)z} - e^{-(2k+2)z}}{z}\right) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{e^{-2kz}}{z}\left(1 - 2e^{-z} + e^{-2z}\right) \\ &= \frac{(1-e^{-z})^2}{z}\frac{1}{1-e^{-2z}}. \end{aligned}$$

6. Laplace-transzformáció segítségével határozzuk meg az $y'' - 2y' + y = x$ differenciálegyenlet $y(0) = 0$ $y'(0) = -1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

Megoldás. Legyen $Y = \mathcal{L}y$, ekkor $\mathcal{L}y'(z) = zY(z) - y(0) = zY(z)$, $\mathcal{L}y''(z) = z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) = z^2Y(z) + 1$. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk:

$$z^2Y(z) + 1 - 2zY(z) + Y(z) = \frac{1}{z^2},$$

amiből

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{z^2} - 1}{z^2 - 2z + 1} = -2\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z^2} + 2\frac{1}{z}.$$

Ez az $y(x) = -2e^x + x + 2$ Laplace-transzformáltja.

7. Laplace-transzformáció segítségével oldjuk meg az $y'' + 2y' + 2y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Legyen $Y(z) = \mathcal{L}y(z)$, ekkor

$$\mathcal{L}y'(z) = zY(z) - y(0) = zY(z)$$

és

$$\mathcal{L}y''(z) = z^2Y(z) - zy(0) - y'(0) = z^2Y(z) - 1,$$

tehát a megoldandó egyenlet

$$z^2Y(z) - 1 + 2zY(z) + 2Y(z) = 0,$$

amiből

$$Y(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2} = \frac{1}{(z+1)^2 + 1}.$$

Ez az $y(x) = e^{-x}\sin x$ függvény Laplace-transzformáltja.

8. Laplace-transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az $xy'' + 2y' - xy = 0$ differenciálegyenletet.

   Megoldás. Legyen $\mathcal{L}y = Y$ és $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$, ekkor

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}y')(z) &= zY(z) - y_0 \\
(\mathcal{L}y'')(z) &= z^2Y(z) - zy_0 - y_0' \\
\mathcal{L}(xy)(z) &= -Y'(z) \\
\mathcal{L}(xy'')(z) &= -2zY(z) - z^2Y'(z) + y_0
\end{aligned}$$

Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk:

$$-2zY(z) - z^2Y'(z) + y_0 + 2(zY(z) - y_0) - (-Y'(z)) = 0,$$

amiből

$$-Y'(z) = \frac{y0}{z^2 - 1} = \frac{y_0}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{y_0}{2}\frac{1}{z+1},$$

ennek inverz Laplace-transzformáltja

$$\frac{y_0}{2}e^x - \frac{y_0}{2}e^{-x} = y_0 \sinh x.$$

Tehát $y(x) = y_0 \frac{\sinh x}{x}$ megoldás. Ez nem az általános megoldás, egy másikat kereshetünk például a Wronski-determináns segítségével. $W' = -\frac{2}{x}W$ alapján $W(x) = \frac{C}{x^2}$. $c(x)\frac{\sinh x}{x}$ akkor megoldás, ha

$$\frac{C}{x^2} = c'(x)\left(\frac{\sinh x}{x}\right)^2,$$

azaz

$$c'(x) = \frac{C}{\sinh^2 x}.$$

Ebből $c(x) = C \tanh x + C_2$, és így egy másik lineárisan független megoldás $\frac{\cosh x}{x}$. Az egyenlet általános megoldása

$$y(x) = A\frac{\sinh x}{x} + B\frac{\cosh x}{x}.$$

9. Laplace-transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= -y_1 + y_2 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszert $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Legyen $\mathcal{L}y_i = Y_i$, ekkor $(\mathcal{L}y_1')(z) = zY_1(z) - 1$ és $(\mathcal{L}y_2')(z) = zY_2(z)$. Laplace-transzformáljuk az egyenletek mindkét oldalát:

$$\begin{aligned} zY_1(z) - 1 &= -3Y_1(z) + 4Y_2(z) \\ zY_2(z) &= -Y_1(z) + Y_2(z), \end{aligned}$$

ez egy (algebrai) lineáris egyenletrendszer $Y_1(z)$ és $Y_2(z)$ ismeretlenekkel. A megoldás parciális törtekre bontva

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= -2\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1} \\ Y_2(z) &= -\frac{1}{(z+1)^2}, \end{aligned}$$

ezek inverz Laplace-transzformáltja

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -2xe^{-x} + e^{-x} \\ y_2(x) &= -xe^{-x}. \end{aligned}$$