Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

12. feladatsor: Lineáris állandó együtthatós egyenletrendszerek

---

1. Mi a Jordan-felbontása az
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$$
mátrixnak?
2. Adjuk meg az
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
mátrix Jordan-felbontását.
3. Határozzuk meg az
$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= -9y_1 - 7y_2 \end{aligned}$$
differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását.
4. Oldjuk meg az
$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - y_2 \end{aligned}$$
differenciálegyenlet-rendszert $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$ kezdeti feltétel mellett.
5. Oldjuk meg az
$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_2 + y_3 \\ y_3' &= -2y_3 \end{aligned}$$
differenciálegyenlet-rendszert $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

További gyakorló feladatok

6. Határozzuk meg az
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
mátrix Jordan-féle normálalakját.
7. Határozzuk meg az
$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= -3y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$
differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását.

8. Oldjuk meg az

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

differenciálegyenlet-rendszert $\mathbf{y}(0) = (3, 2)$ kezdeti feltétel mellett.

9. Oldjuk meg az

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 10 & -19 & 13 \\ 1 & -1 & 1 \\ -9 & 18 & -12 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

differenciálegyenlet-rendszert $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 1)$ kezdeti feltétel mellett.

10. Oldjuk meg az

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 6 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

differenciálegyenlet-rendszert $\mathbf{y}(0) = (1, 1, -1)$ kezdeti feltétel mellett.

11. $*$ Határozzuk meg az $\mathbf{y}'' + \Omega^2 \mathbf{y} = 0$ differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását, ha Ω $n \times n$ méretű szimmetrikus pozitív definit mátrix. Mutassuk meg, hogy minden megoldás korlátos.

12. $*$ Legyenek M, C, K $n \times n$-es mátrixok, M invertálható, és tekintsük az $M\mathbf{y}'' + C\mathbf{y}' + K\mathbf{y} = 0$ másodrendű differenciálegyenlet-rendszert.
    a) Írjuk át elsőrendű egyenletrendszerré az $\mathbf{y}, \mathbf{y}'$ komponenseit tartalmazó ($2n$ elemű) vektorértékű függvényre nézve.
    b) Mutassuk meg, hogy az így kapott elsőrendű állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszer mátrixának sajátértékei a $\det(\lambda^2 M + \lambda C + K) = 0$ egyenlet gyökei. (Az ilyen típusú egyenletek neve kvadratikus sajátérték-probléma.)
    c) Tegyük fel, hogy M, C és K mindegyike pozitív definit. Mutassuk meg, hogy ekkor minden sajátérték valós része negatív. (Ebből következik, hogy minden megoldás 0-hoz tart amint $x \to \infty$.)