Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

13. feladatsor: Stabilitásvizsgálat, speciális egyenlettípusok (megoldás)

---

1. Instabilis vagy stabilis az

$$y_1' = y_1 + 3y_2 + 2y_3$$
$$y_2' = -y_2 - 2y_3$$
$$y_3' = 2y_1 + 3y_2 - y_3$$

differenciálegyenlet-rendszer? Igaz-e, hogy aszimptotikusan stabilis?

Megoldás. $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ jelöléssel az egyenlet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ alakú, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det(A-\lambda I) = -\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1 = -(\lambda+1)(\lambda^2+1)$ gyökei -1 és $\pm i$, tehát az egyenletrendszer stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis.

2. Stabilis-e az $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 9 \\ -1 & 4 & -5 \\ -2 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet-rendszer?

Megoldás. $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda^2 = -\lambda^2(\lambda + 1)$, tehát $\lambda = 0$ kétszeres, $\lambda = -1$ egyszeres sajátérték. Az utóbbival nem kell foglalkozni, az előbbihez tartozó sajátvektorok

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

alapján $(3, 2, 1)$ többszörösei, vagyis csak egydimenziós alteret alkotnak. Eszerint a 0 sajátértékhez egy 2×2 Jordan-blokk tartozik, vagyis az egyenletrendszer instabilis.

3. Hol vannak és milyen típusúak stabilitás tekintetében az $y' = y - y^3$ differenciálegyenlet stacionárius pontjai?

Megoldás. y stacionárius pont, ha $0 = f(y) = y - y^3 = y(1 - y^2)$, vagyis $y \in \{-1, 0, 1\}$. Mivel $f'(y) = 1 - 3y^2$, és így $f'(0) = 1$, $f'(\pm 1) = -2$, a 0 instabilis, ± 1 aszimptotikusan stabilis.

4. A csillapított síkinga mozgásegyenlete $y'' + 2\alpha y' + \sin(y) = 0$, ahol $\alpha > 0$ jelent csillapítást, y a függőlegessel bezárt szög ($y = 2k\pi$ lefelé, $y = (2k+1)\pi$ pedig felfelé). Mik az egyensúlyi pontok és melyek stabilisak?

Megoldás. $y_1 = y$, $y_2 = y'$ bevezetésével az

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -\sin(y_1) - 2\alpha y_2$$

egyenletrendszert kapjuk, a jobb oldal akkor 0, ha $y_2 = 0$ és $-\sin(y_1) = 0$, azaz $y_1 = k\pi$ valamilyen $k \in \mathbb{Z}$-re. A deriváltmátrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(y_1) & -2\alpha \end{bmatrix},$$

ennek sajátértékei $-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \cos(y_1)}$. Ha $y_1 = 2k\pi$, akkor ez $-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$, tehát $\alpha > 0$ esetén aszimptotikusan stabilis, $\alpha = 0$ esetén a stabilitás nem dönthető el ezek alapján (egyébként stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis), $\alpha < 0$ esetén instabilis. Ha viszont $y_1 = (2k+1)\pi$, akkor a sajátértékek $-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 1}$, vagyis az egyensúlyi helyzet bármilyen α mellett instabilis.

5. Bernoulli-féle differenciálegyenletnek nevezzük az

$$A_1(x)y' + A_0(x)y = B(x)y^\alpha$$

alakú egyenleteket, ahol $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, A_0, A_1 és B adott függvények. Az ilyen egyenleteket $u(x) = y(x)^{1-\alpha}$ helyettesítéssel visszavezethetjük elsőrendű lineáris differenciálegyenletre. Oldjuk meg az alábbi Bernoulli-féle differenciálegyenleteket:
a) $2y' + y = (x - 1)y^3$,
b) $3(1 + x^2)y' + y = y^4$.

Megoldás.
a) $\alpha = 3$ miatt $u(x) = y(x)^{-2}$ helyettesítést alkalmazunk. Az új egyenlet

$$u' = -2\frac{1}{y^3}y' = \frac{1}{y^3}\left(y - (x-1)y^3\right) = \frac{1}{y^2} - x + 1 = u + 1 - x.$$

A homogén egyenlet megoldása $u(x) = Ce^x$, az inhomogén egyenlet megoldása az állandók variálásának módszere szerint $u(x) = c(x)e^x$ alakú, ahol $c'(x) = e^{-x}(1 - x)$. Ebből $c(x) = xe^{-x} + C$, tehát az általános megoldás $u(x) = x + Ce^x$. Visszahelyettesítve $y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{x+Ce^x}}$. A helyettesítés miatt külön meg kell nézni, hogy mi történik $y = 0$ esetén. Láthatjuk, hogy ekkor a megoldás azonosan 0, ami az előbbi általános megoldás $C \to \infty$ limesze.

b) Most $\alpha = 4$, tehát $u(x) = y(x)^{-3}$ helyettesítés célravezető. Az új egyenlet

$$u' = -3\frac{1}{y^4}y' = \frac{1}{y^4}\frac{y - y^4}{1 + x^2} = \frac{1}{y^3}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}u - \frac{1}{1+x^2}.$$

A homogén egyenlet megoldása $u(x) = e^{\arctan x}$, az inhomogéné $u(x) = c(x)e^{\arctan x}$, ahol

$$c'(x) = e^{-\arctan x}\frac{-1}{1+x^2},$$

tehát $c(x) = e^{-\arctan x} + C$. Az eredeti egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(e^{-\arctan x} + C)e^{\arctan x}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + Ce^{\arctan x}}}.$$

Most is igaz, hogy $y(x) = 0$ is megoldás, ami a helyettesítés miatt nem látszik az általános megoldáson.

6. Euler-féle differenciálegyenletnek nevezzük az

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}\frac{1}{x}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}}y' + a_0\frac{1}{x^n} = b(x)$$

alakú lineáris differenciálegyenleteket, ahol $a_0, \ldots, a_n$ valós számok, $a_n \neq 0$ és $b(x)$ adott függvény. A homogén egyenletet $y(x) = u(\ln|x|)$ helyettesítéssel visszavezethetjük állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletre.
Oldjuk meg az alábbi Euler-féle differenciálegyenleteket:

a) $y'' + \frac{5}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$,

b) $y^{(4)} + \frac{6}{x}y''' + \frac{12}{x^2}y'' + \frac{6}{x^3}y' - \frac{36}{x^4}y = 0$,

c) $y'' - \frac{6}{x^2}y = 5x$.

Megoldás.

a) $y(x) = u(\ln|x|)$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} y' &= \frac{u'(\ln|x|)}{x} \\ y'' &= \frac{u''(\ln|x|)}{x^2} - \frac{u'(\ln|x|)}{x^2}, \end{aligned}$$

tehát az egyenlet

$$\frac{u''(\ln|x|)}{x^2} - \frac{u'(\ln|x|)}{x^2} + 5\frac{u'(\ln|x|)}{x^2} + 4\frac{u(\ln|x|)}{x^2},$$

ami ekvivalens az $u''+4u'+4u = 0$ egyenlettel. A karakterisztikus polinom $\lambda^2+4\lambda+4 = (\lambda+2)^2$, tehát az általános megoldás $u(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$. Az eredeti egyenlet általános megoldása

$$y(x) = A\frac{1}{x^2} + B\frac{\ln|x|}{x^2}.$$

b) $y(x) = u(\ln|x|)$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} y' &= \frac{u'(\ln|x|)}{x} \\ y'' &= \frac{u''(\ln|x|)}{x^2} - \frac{u'(\ln|x|)}{x^2} \\ y''' &= \frac{u'''(\ln|x|)}{x^3} - 3\frac{u''(\ln|x|)}{x^3} + 2\frac{u'(\ln|x|)}{x^3} \\ y^{(4)} &= \frac{u^{(4)}(\ln|x|)}{x^4} - 6\frac{u'''(\ln|x|)}{x^4} + 11\frac{u''(\ln|x|)}{x^4} - 6\frac{u'(\ln|x|)}{x^4}, \end{aligned}$$

ebből az egyenlet átrendezve $u^{(4)} + 5u'' - 36u = 0$. A karakterisztikus polinom $\lambda^4 + 4\lambda^2 - 36 = (\lambda^2-4)(\lambda^2+9)$, tehát a gyökök $2, -2, 3i, -3i$. Az általános megoldás $u(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} + C\cos 3x + D\sin 3x$. Az eredeti egyenlet általános megoldása

$$y(x) = Ax^2 + B\frac{1}{x^2} + C\cos 3\ln x + D\sin 3\ln x.$$

c) Először a homogén egyenletet oldjuk meg $y(x) = u(\ln|x|)$ helyettesítéssel. Az új egyenlet $u'' - u' - 6u = 0$, ennek karakterisztikus polinomja $\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3)$, tehát az általános megoldás $u(x) = Ae^{-2x} + Be^{3x}$. Innen kétféleképp is folytathatjuk: az eredeti egyenlethez tartozó homogén egyenlet általános megoldását felírva az állandók variálásának módszerével, vagy pedig először az u-ra teljesülő inhomogén egyenletet oldjuk meg, majd ebből helyettesítéssel kapjuk az eredeti egyenlet megoldását. Most az utóbbi módszer gyorsabb:

$$u''(x) - u'(x) - 6u(x) = 5e^{3x}$$

megoldása $xe^{3x} + Ae^{-2x} + Be^{3x}$, tehát az eredeti egyenlet általános megoldása

$$y(x) = x^3 \ln x + A\frac{1}{x^2} + Bx^3.$$

7. Az $y'' = f(y, y')$ alakú egyenleteket másodrendű autonóm differenciálegyenletnek nevezzük. Az ilyen egyenletek megoldásánál érdemes $y'(x) = p(y(x))$ helyettesítést alkalmazni, ahol tehát $y \mapsto p(y)$ az új ismeretlen függvény. Ekkor $y''(x) = p'(y(x))y'(x) = p'(y(x))p(y(x))$, így behelyettesítés után a

$$pp' = f(y, p)$$

elsőrendű differenciálegyenlethez jutunk. Ennek megoldása után az $y' = p(y)$ szétválasztható differenciálegyenletet kell megoldani.
Speciális eset: ha f csak az első változótól függ, akkor egy $-U$ primitív függvényt választva ($U'(y) = -f(y, y')$) az első differenciálegyenlet megoldása $p(y) = \sqrt{2(E - U(y))}$, ahol az E paraméter neve energia, $U(y)$ pedig a potenciális energia.
Oldjuk meg az alábbi másodrendű autonóm differenciálegyenleteket.
a) $y''(1 + y^2) = yy'^2$,
b) $y'' = \dfrac{y'^2}{y} + \dfrac{y'}{\sqrt{\ln y}}$ az $y(0) = e$, $y'(0) = 2e$ kezdeti feltétel mellett,
c) $y'' = \frac{1}{y^3}$,
d) $y'' = -y$.

Megoldás.
a) $y' = p(y)$ helyettesítés után az egyenlet $pp'(1 + y^2) = yp^2$, ami szétválasztható:

$$\frac{p'}{p} = \frac{y}{1 + y^2},$$

a két oldalt integrálva $\ln p(y) = \ln \sqrt{1 + y^2} + C$, tehát $p(y) = C_1\sqrt{1 + y^2}$.
A következő lépés $y' = p(y)$ megoldása. Átrendezve

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y^2}} = C_1,$$

tehát $\operatorname{arsinh}(y(x)) = C_1x + C_2$, azaz $y(x) = \sinh(C_1x + C_2)$.
b) $y' = p(y)$ helyettesítés után az egyenlet

$$pp' = \frac{p^2}{y} + \frac{p}{\sqrt{\ln y}},$$

ami p-vel osztás után lineáris:

$$p' - \frac{1}{y}p = \frac{1}{\sqrt{\ln y}}.$$

A homogén egyenlet általános megoldása Cy, az állandók variálásának módszere alapján az inhomogén egyenleté $c(y)y$, ahol $c'(y) = \frac{1}{y\sqrt{\ln y}}$, tehát $c(y) = 2\sqrt{\ln y} + C$, $p(y) = 2y\sqrt{\ln y} + Cy$. A kezdeti feltétel alapján

$$2e = y'(0) = p(y(0)) = p(e),$$

emiatt $C = 0$.
Végül meg kell oldani az $y'(x) = 2y\sqrt{\ln y}$ differenciálegyenletet $y(0) = e$ kezdeti feltétel mellett. Ez szétválasztható, integrálással kapjuk a megoldást: $2\sqrt{\ln y(x)} = 2x$, azaz $y(x) = e^{x^2}$.

c) Ebben az egyenletben nem szerepel y', $U(y) = \frac{1}{2y^2}$ jelöléssel $y'' = -U'(y)$, amiből $y' = p(y) = \sqrt{2(E - U(y))}$. A szétválasztható egyenletet átrendezzük ($y = 0$ esetén az egyenlet nem értelmes, tegyük fel, hogy végig $y(x) > 0$):

$$1 = \frac{y'}{\sqrt{2(E-U(y))}} = \frac{y'}{\sqrt{2\left(E - \frac{1}{2y^2}\right)}} = \frac{yy'}{\sqrt{2Ey^2 - 1}},$$

mindkét oldalt integrálva

$$x + C = \frac{\sqrt{2Ey^2 - 1}}{2E},$$

azaz

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2E} + 2E(x + C)^2}.$$

d) Legyen $U(y) = \frac{y^2}{2}$, az egyenlet ezzel $y'' = -U'(y)$, tehát $y' = \sqrt{2E - y^2}$. Átrendezzük és mindkét oldalt integráljuk:

$$x + C = \int \frac{y'}{\sqrt{2E - y^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2E}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{\sqrt{2E}}\right)^2}}\,\mathrm{d}y = \arcsin\frac{y}{\sqrt{2E}}.$$

Ha rögzítünk egy C értéket, akkor úgy tűnik, mintha x csak a $[-\pi/2 - C, \pi/2 - C]$ intervallumban lehetne, tehát a megoldások csak véges sokáig léteznének. Azonban invertálás után az $y(x) = \sqrt{2E}\sin(x + C)$ kifejezést kapjuk, ami minden x-re értelmes és meg is oldja a differenciálegyenletet (ez az általános megoldás).
Megjegyzés. Ugyanez történik bármely olyan $U(y)$ és E mellett, amire az $\{y \in \mathbb{R} | U(y) \leq E\}$ halmaz korlátos (és a végpontokon U deriváltja nem 0), ami azzal függ össze, hogy a megoldás ilyenkor periodikus és y' kétértékű függvénye y-nak.

További gyakorló feladatok

8. Stabilis-e az

$$\begin{aligned}
y_1' &= -y_1 + y_3 + y_4\\
y_2' &= -2y_1 + y_2 - 2y_4\\
y_3' &= -y_2 + y_3 + 2y_4\\
y_4' &= -2y_1 + y_2 - y_4
\end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer?

Megoldás. Az egyenletrendszer lineáris, $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ alakú, ahol $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ és

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A karakterisztikus egyenlet $0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (1 + \lambda^2)^2$, tehát $\lambda = \pm i$ a két gyök, mindkettő kétszeres. Az i-hez tartozó sajátvektorokat a

$$\begin{bmatrix} -1-i & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1-i & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1-i & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

egyenletrendszer megoldásai adják, ezek $(0, -1-i, 1, -1)$ többszörösei. Mivel ezek nem kétdimenziós alteret alkotnak, az i sajátértékhez egy darab 2×2 Jordan-blokk tartozik, tehát az egyenletrendszer instabilis.

9. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszerek stacionárius pontjait. Milyen típusúak stabilitás tekintetében?

a)

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_2^3 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1^2 + y_2 - y_1 y_2 - 2 \\ y_2' &= -y_1^2 - 2y_2 + y_1 y_2 + 4 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} y_1' &= \sin y_1 + \sin y_2 \\ y_2' &= -\sin y_1 + \sin y_2 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} y_1' &= (1 - y_1^2 - y_2^2) y_1 \\ y_2' &= (1 - y_1^2 - y_2^2) y_2 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} y_1' &= (y_1 - 1)^2 + y_2^2 - 2 \\ y_2' &= (y_1 + 1)^2 + y_2^2 - 2 \end{aligned}$$

Megoldás.

a) A stacionárius pontok a $0 = -2y_1 + y_2^3 = -2y_1 + y_2$ egyenletrendszer megoldásai. A két egyenlet különbsége $0 = y_2^3 - y_2 = y_2(y_2^2 - 1) = y_2(y_2 - 1)(y_2 + 1)$, amiből $y_2 = 0$ vagy $y_2 = \pm 1$, a második egyenletből pedig $y_1 = \frac{y_2}{2}$. A jobb oldal deriváltmátrixa

$$D_{(y_1, y_2)} = \begin{bmatrix} -2 & 3y_2^2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ennek karakterisztikus polinomja $\det(D_{(y_1,y_2)} - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda + 6y_2^2 - 2$. Ha $y_2 = 0$, akkor a gyökök -2 és 1, ha pedig $y_2 = \pm 1$, akkor $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{15})$, tehát $(0, 0)$ instabilis, $(1, \frac{1}{2})$ és $(-1, -\frac{1}{2})$ aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pontok.

b) A stacionárius pontok $\mathbf{f}(y_1,y_2) = (y_1^2 + y_2 - y_1y_2 - 2, -y_1^2 - 2y_2 + y_1y_2 + 4) = (0,0)$ megoldásai. A két egyenlet összege $2 - y_2 = 0$, tehát $y_2 = 2$ és $y_1 = 0$ vagy $y_1 = 2$. A $D_{(y_1,y_2)}\mathbf{f}$ lineáris leképezés mátrixa

$$D_{(y_1,y_2)} = \begin{bmatrix} 2y_1 - y_2 & 1 - y_1 \\ -2y_1 + y_2 & -2 + y_2 \end{bmatrix},$$

amibe a stacionárius pontokat helyettesítve a

$$D_{(0,2)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ és } D_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixok adódnak. Ezek karakterisztikus polinomjai $\lambda^2 + 4\lambda + 2$ és $\lambda^2 - 2\lambda - 2$, tehát az első aszimptotikusan stabilis, a második instabilis stacionárius pont.

c) $0 = \sin y_1 + \sin y_2 = -\sin y_1 + \sin y_2$ pontosan akkor teljesül, ha $\sin y_1 = \sin y_2 = 0$, tehát ha y_1 és y_2 is a π egész számú többszöröse. A jobboldal deriváltmátrixa

$$D_{(y_1,y_2)} = \begin{bmatrix} \cos y_1 & \cos y_2 \\ -\cos y_1 & \cos y_2 \end{bmatrix},$$

aminek értéke az egyes a stacionárius pontokban

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

aszerint, hogy y_1 és y_2 páros vagy páratlan többszöröse π-nek. A sajátértékpárok rendre $1 \pm i$, $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{2}$ illetve $-1 \pm i$. Tehát az $y_1 = (2k+1)\pi$, $y_2 = (2l+1)\pi$ alakú stacionárius pontok aszimptotikusan stabilisak, a többi instabilis.

d) A két egyenlet jobb oldala akkor 0, ha $y_1^2 + y_2^2 = 1$ vagy $y_1 = y_2 = 0$. A deriváltmátrix

$$D_{(y_1,y_2)} = \begin{bmatrix} 1 - 3y_1^2 - y_2^2 & -2y_1y_2 \\ -2y_1y_2 & 1 - y_1^2 - 3y_2^2 \end{bmatrix},$$

aminek a karakterisztikus polinomja

$$\lambda^2 + 2(2y_1^2 + 2y_2^2 - 1)\lambda + (y_1^2 + y_2^2 - 1)(3y_1^2 + 3y_2^2 - 1),$$

így a sajátértékek $1 - y_1^2 - y_2^2$ és $1 - 3y_1^2 - 3y_2^2$. Az origóban mindkettő 1, tehát ez instabilis, az egységkörön pedig 0 és -2, tehát a stabilitás ennek alapján nem dönthető el (egyébként stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis).

e) A stacionárius pontok azok az (y_1, y_2) párok, amelyekre az egyenletek jobb oldala 0, tehát $(y_1 - 1)^2 = (y_1 + 1)^2$, amiből $y_1 = 0$ és így $0 = 1 + y_2^2 - 2$, tehát $y_2 = \pm 1$. A jobb oldal deriváltmátrixa

$$D_{(y_1,y_2)} = \begin{bmatrix} 2(y_1 - 1) & 2y_2 \\ 2(y_1 + 1) & 2y_2 \end{bmatrix},$$

ennek sajátértékei $y_1 + y_2 - 1 \pm \sqrt{(y_1 + y_2 - 1)^2 + 8y_2}$. Az $(y_1, y_2) = (0,1)$ pontban ezek $\pm 2\sqrt{2}$, tehát ez a pont instabilis, az $(y_1, y_2) = (0, -1)$ pontban pedig $-2 \pm 2i$, tehát ez a pont aszimptotikusan stabilis.