Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

2. feladatsor: Potenciálfüggvény, alakzatok paraméterezése (megoldás)

---

1. Potenciálos-e az alábbi vektormező? Ha igen, adjuk meg egy potenciálját.
   a) $\mathbf{u}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
   b) $\mathbf{u}(x, y, z) = ze^{x+\sin y}\mathbf{i} + ze^{x+\sin y}\cos y\mathbf{j} + e^{x+\sin y}\mathbf{k}$
   c) $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^2 + yz)\mathbf{i} + (y - x^2)\mathbf{j} + (z + xy)\mathbf{k}$

   Megoldás. Mindhárom vektormező az egész térben (síkon) értelmezett, tehát akkor pontenciálos, ha a rotációja 0.

   a) $\dfrac{\partial x}{\partial x} - \dfrac{\partial y}{\partial y} = 1 - 1 = 0$, tehát potenciálos. Egy potenciál

   $$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^x u_x(\xi, y)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(0, \eta)\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_0^x y\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y 0\,\mathrm{d}\eta = xy \end{aligned}$$

   b)

   $$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ze^{x+\sin(y)} & z\cos(y)e^{x+\sin(y)} & e^{x+\sin(y)} \\ z\cos(y)e^{x+\sin(y)} & z\cos^2(y)e^{x+\sin(y)} - z\sin(y)e^{x+\sin(y)} & \cos(y)e^{x+\sin(y)} \\ e^{x+\sin(y)} & \cos(y)e^{x+\sin(y)} & 0 \end{bmatrix}$$

   szimmetrikus, tehát a vektormező potenciálos. Egy potenciál

   $$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x u_x(\xi, y, z)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(0, \eta, z)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(0, 0, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^x ze^{\xi+\sin y}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y ze^{\sin\eta}\cos\eta\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z 1\,\mathrm{d}\zeta \\ &= (e^x - 1)ze^{\sin y} + (e^{\sin y} - 1)z + z = ze^{x+\sin y} \end{aligned}$$

   c)

   $$\frac{\partial(y - x^2)}{\partial x} = -2x \neq z = \frac{\partial(x^2 + yz)}{\partial y},$$

   tehát ez a vektormező nem potenciálos. $(\operatorname{rot}\mathbf{u} = x\mathbf{i} - (2x + z)\mathbf{k})$

2. Centrális vektormezőnek nevezzük a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ alakú vektormezőket, ahol $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tetszőleges differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy minden centrális vektormező potenciálos és határozzuk meg egy potenciálfüggvényt.

   Megoldás. A szimmetria miatt elég a deriváltmátrix egy főátlón kívüli elemét számolni, pl. az első komponens y szerinti deriváltja a láncszabály alapján:

   $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}x\right) = \left(\frac{f'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{x^2 + y^2 + z^2}\right)\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

   ami x és y cseréjére szimmetrikus, tehát a rotáció esetleg az origó kivételével mindenhol 0. $\mathbf{v}$ az origó körüli forgatásokra nézve szimmetrikus, így sejthetjük, hogy a potenciálfüggvény is ilyen (ha létezik). Számoljuk ki $F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ gradiensét, ahol F tetszőleges függvény:

   $$\operatorname{grad} F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = F'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

   tehát ha $F' = f$, akkor a gradiens éppen $\mathbf{v}$. Mivel f folytonos, ilyen tulajdonságú F függvény létezik (primitív függvény).

3. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{u}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + 3xz^2\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$ vektorpotenciálos és adjuk meg egy vektorpotenciálját.

   Megoldás. A vektormező mindenhol értelmezett, $\operatorname{div}\mathbf{u} = 2x + 0 - 2x = 0$, tehát létezik vektorpotenciál.

$$\begin{aligned} v_x(x,y,z) &= \int_0^z u_y(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^z (3x\zeta^2)\,\mathrm{d}\zeta = xz^3 \\ v_y(x,y,z) &= \int_0^x u_z(\xi,y,0)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^z u_x(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^x (-2\cdot\xi\cdot 0)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^z x^2\,\mathrm{d}\zeta = -x^2z \end{aligned}$$

   Eszerint $\mathbf{v}(x,y,z) = xz^3\mathbf{i} - x^2z\mathbf{j}$ egy vektorpotenciál.

4. Adjuk meg az alábbi görbék egy paraméterezését:
   a) $A = (2,1,5)$ és $B = (-1,9,11)$ pontokat összekötő szakasz
   b) origó középpontú, a és b hosszúságú, az x ill. y tengelyekkel párhuzamos féltengelyekkel rendelkező ellipszis
   c) az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ és $x + 2y = 0$ egyenletű felületek metszésvonala.

   Megoldás.
   a) Legyen $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ és $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$ a két végpont helyvektora. Ekkor $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ a szakasz paraméterezése, ha $t \in [0,1]$.
   b) Az egységkör egy kényelmes paraméterezése $\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ ($t \in [0,2\pi]$). Ebből nyújtással kapunk ellipszist: $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\sin t\mathbf{j}$.
   c) A második egyenletből $x = -2y$, amit az elsőbe írva $5y^2 + z^2 = a^2$ adódik. Az x koordináta nélkül ez egy olyan ellipszis, ami az $y - z$ síkban helyezkedik el, a tengelyek szimmetriatengelyei, tehát az előzőek mintájára $\frac{a}{\sqrt{5}}\cos t\mathbf{j} + a\sin t\mathbf{k}$ egy paraméterezésa. Az x koordinátát y meghatározza, így a metszésvonal így paraméterezhető: $\mathbf{r}(t) = -\frac{2a}{\sqrt{5}}\cos t\mathbf{i} + \frac{a}{\sqrt{5}}\cos t\mathbf{j} + a\sin t\mathbf{k}$ ($t \in [0,2\pi]$).

5. Milyen alakzat paraméterezése az $\mathbf{r}(t) = R(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}) + at\mathbf{k}$, ha $R > 0$?

   Megoldás. Az utolsó koordinátát elhagyva az $x - y$ síkban fekvő R sugarú körhöz jutunk, "egyenletesen" paraméterezve. Az utolsó koordináta eközben lineárisan növekszik, tehát az alakzat csavarvonal, ami egy R sugarú henger palástján helyezkedik el. Mivel a vetület 2π szerint periodikus, a menetemelkedés $2\pi a$.

6. Adjuk meg az $\mathbf{a} = (2,1,9)$, $\mathbf{b} = (1,5,10)$ és $\mathbf{c} = (0,4,0)$ helyvektorú pontokat tartalmazó sík egy paraméteres egyenletét és ennek segítségével írjuk fel egy normálvektorát.

   Megoldás. $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + v(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (2 - u - 2v)\mathbf{i} + (1 + 4u + 3v)\mathbf{j} + (9 + u - 9v)\mathbf{k}$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = (-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}) = -39\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

7. Tekintsük az origó középpontú egységgömb felszínét a szokásos paraméterezéssel. Adjuk meg az alábbi egyenlőtlenségek által meghatározott daraboknak megfelelő paramétertartományt:
   a) $z \geq 0$
   b) $x^2 + y^2 \leq z^2$
   c) $z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$
   d) $x \geq 0$

Megoldás. A paraméterezés $\mathbf{r}(\vartheta,\varphi) = \sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i}+\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j}+\cos\vartheta\mathbf{k}$, a teljes gömbfelszínt akkor fedi le egyszeresen (majdnem mindenhol), ha pl. $\vartheta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, de az utóbbi intervallum szabadon eltolható

a) $\cos\vartheta \geq 0$ akkor, ha $(\vartheta,\varphi) \in [0,\pi/2]\times[0,2\pi]$

b) a feltétel: $(\sin\vartheta\cos\varphi)^2 + (\sin\vartheta\sin\varphi^2) = \sin^2\vartheta \leq \cos^2\vartheta$, tehát $(\vartheta,\varphi) \in ([0,\pi/4] \cup [3\pi/4,\pi])\times[0,2\pi]$

c) $\cos\vartheta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ akkor teljesül, ha $(\vartheta,\varphi) \in [\pi/4,\pi]\times[0,2\pi]$

d) a feltétel $\sin\vartheta\cos\varphi \geq 0$, ami $\sin\vartheta \geq 0$ miatt $(\vartheta,\varphi) \in [0,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]$ mellett teljesül.

8. Az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott térrészekhez válasszunk olyan koordinátarendszert, amelyre nézve a paramétertartomány téglatest és határozzuk is meg azt.

a) $x^2+y^2+z^2 \leq 2$, $x \geq 0$, $x^2+y^2 \leq z^2$, $z \geq 0$

b) $x^2+y^2 \leq 4$, $x \leq y$, $0 \leq y$, $|z| \leq 2$

Megoldás.

a) gömbi koordinátarendszerben $\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi) = r\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + r\cos\vartheta\mathbf{k}$, a tartomány $r \in [0,\sqrt{2}]$, $\vartheta \in [0,\pi/4]$, $\varphi \in [-\pi/2,\pi/2]$.

b) hengerkoordinátákkal $\mathbf{r}(\varrho,\phi,z) = \varrho\cos\phi\mathbf{i} + \varrho\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a tartomány $\varrho \in [0,2]$, $\phi \in [\pi/4,\pi]$, $z \in [-2,2]$

További gyakorló feladatok

9. Potenciálos-e az alábbi vektormező? Ha igen, adjuk meg egy potenciálját.

a) $\mathbf{u}(x,y,z) = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$

b) $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$

c) $\mathbf{u}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$

Megoldás. Mindhárom vektormező az egész térben értelmezett, tehát akkor potenciálos, ha a rotációja 0.

a) A rotáció $\dfrac{\partial(x+y)}{\partial y} - \dfrac{\partial(x+z)}{\partial z} = 1-1 = 0$, $\dfrac{\partial(y+z)}{\partial z} - \dfrac{\partial(x+y)}{\partial x} = 1-1 = 0$, $\dfrac{\partial(x+z)}{\partial x} - \dfrac{\partial(y+z)}{\partial y} = 1-1 = 0$, tehát létezik potenciál. Egy potenciál

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x u_x(\xi,y,z)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(0,\eta,z)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(0,0,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^x (y+z)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y z\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z 0\,\mathrm{d}\zeta \\ &= x(y+z) + zy = xy + yz + zx \end{aligned}$$

b) A deriváltmátrix az egységmátrixszal egyenlő, tehát szimmetrikus. Emiatt a rotáció 0 és létezik potenciál.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_0^x u_x(\xi,y,z)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(0,\eta,z)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(0,0,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^x \xi\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y \eta\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z \zeta\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ -y & -x & 0 \end{bmatrix}$$

nem szimmetrikus, tehát nincsen potenciál.

10. Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ differenciálható és tekintsük a $\mathbf{v}(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2})\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ vektormezőt. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{v}$ potenciálos és határozzuk meg egy potenciálfüggvényét.

    Megoldás. $\mathbf{v}$ a z tengely körüli forgatásokra nézve szimmetrikus, így sejthetjük, hogy a potenciálfüggvény is ilyen (ha létezik). Számoljuk ki $F(\sqrt{x^2 + y^2})$ gradiensét, ahol F tetszőleges függvény:

    $$\operatorname{grad} F(\sqrt{x^2 + y^2}) = F'(\sqrt{x^2 + y^2})\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

    tehát ha $F' = f$, akkor a gradiens éppen $\mathbf{v}$. Mivel f folytonos, ilyen tulajdonságú F függvény létezik.

11. Az origón átmenő tengely körül $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ szögsebességgel forgó test $\mathbf{r}$ helyvektorú pontjának sebessége $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$. Határozzuk meg $\mathbf{u}$ egy vektorpotenciálját.

    Megoldás. Koordinátákkal $\mathbf{u}(x, y, z) = (w_y z - w_z y)\mathbf{i} + (w_z x - w_x z)\mathbf{j} + (w_x y - w_y x)\mathbf{k}$. A divergencia számolásához a komponenseket rendre x, y és z szerint kell deriválni. Ezek a deriváltak mind 0-val egyenlőek, tehát $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, vagyis létezik vektorpotenciál. Egy lehetséges vektorpotenciál komponensfüggvényei:

    $$\begin{aligned} v_x(x, y, z) &= \int_0^z u_y(x, y, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^z (w_z x - w_x\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = w_z xz - w_x\frac{z^2}{2} \\ v_y(x, y, z) &= \int_0^x u_z(\xi, y, 0)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^z u_x(x, y, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^x (w_x y - w_y\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^z (w_y\zeta - w_z y)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= w_x xy + w_z yz - w_y\frac{x^2 + z^2}{2} \\ v_z(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

12. Adjuk meg az $x^2 + y^2 = z^2$ kúpfelület és az $x + z = 1$ egyenletű sík metszésvonalának egy paraméterezését.

    Megoldás. A második egyenletből $z = 1 - x$, ezt az elsőbe írva

    $$x^2 + y^2 = (1 - x)^2 = 1 + x^2 - 2x,$$

    tehát $1 - y^2 = 2x$. Eszerint x és z kifejezhető y segítségével, válasszuk ezt paraméternek: $t = y$. A paraméterezés

    $$\mathbf{r}(t) = \frac{1 - t^2}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1 + t^2}{2}\mathbf{k},$$

    ahol $t \in \mathbb{R}$.

13. Az $y^2 + z^2 = a^2$ és $x^2 + z^2 = b^2$ egyenletű hengerfelületek metszésvonala $a \neq b$ esetén két zárt görbéből áll. Adjuk meg ezek egy-egy paraméterezését az $a < b$ esetben.

    Megoldás. A két görbe a nagyobb sugarú henger egy-egy oldalán helyezkedik el, tehát az egyik az $x < 0$, a másik az $x > 0$ félsíkban. Emiatt megtehetjük, hogy a kisebb sugarú henger yz síkra való vetületét (a sugarú kör) paraméterezzük, és a második egyenletből kifejezzük az x értékeket. Ebből a következő paraméterezések adódnak ($t \in [0, 2\pi]$):

    $$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \sqrt{b^2 - a^2\sin^2 t}\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + a\sin t\,\mathbf{k} \\ \mathbf{r}(t) &= -\sqrt{b^2 - a^2\sin^2 t}\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + a\sin t\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

14. Adjuk meg az $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ egyenletű egyköpenyű forgáshiperboloid egy paraméteres egyenletét és határozzuk meg minden pontjában a normálvektorát.

Megoldás. $\mathbf{r}(u, v) = \cosh u \cos v\mathbf{i} + \cosh u \sin v\mathbf{j} + \sinh u\mathbf{j}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= (\sinh u \cos v\mathbf{i} + \sinh u \sin v\mathbf{j} + \cosh u\mathbf{k}) \times (-\cosh u \sin v\mathbf{i} + \cosh u \cos v\mathbf{j}) \\ &= -\cosh^2 u \cos v\mathbf{i} - \cosh^2 u \sin v\mathbf{j} + \cosh u \sinh u\mathbf{k}\end{aligned}$$

15. Forgassuk meg az $y = f(x)$ függvény grafikonját az x tengely körül. Határozzuk meg a kapott felület egy paraméterezését.

Megoldás. $\mathbf{r}(t, \phi) = t\mathbf{i} + f(t) \cos \phi\mathbf{j} + f(t) \sin \phi\mathbf{k}$, ahol $t \in \mathbb{R}$, $\phi \in [0, 2\pi]$.

16. Egy egyenes körhenger tengelyének két végpontja $A = (2, 2, 7)$ és $B = (-1, 5, 3)$. Adjuk meg a henger palástjának egy paraméterezését, ha a henger sugara 3.

Megoldás. A két végpontot összekötő (irány)vektor $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. A hengernek erre merőleges síkmetszetei körök, a paraméterezéshez a legegyszerűbb, ha keresünk két $\mathbf{v}$-re és egymásra is merőleges egységvektort (egyet könnyű találni, a harmadik vektoriális szorzással előállítható). Ilyenek pl. $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ és $\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$. Ezzel a paraméterezés

$$\mathbf{r}(\phi, t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v} + 3 \cos \phi\mathbf{u} + 3 \sin \phi\mathbf{w},$$

ahol $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ az A pont helyvektora, $\phi \in [0, 2\pi]$ és $t \in [0, 1]$.

17. Tekintsük azt a tóruszt, amelynek középköre R sugarú, az $x-y$ síkban fekszik, középpontja az origó, és amelynek a keresztmetszete $r < R$ sugarú kör. Adjuk meg a tórusz felületének egy paraméterezését.

Megoldás. $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = (R + r \sin \vartheta) \cos \varphi\mathbf{i} + (R + r \sin \vartheta) \sin \varphi\mathbf{j} + r \cos \vartheta\mathbf{k}$. Egy lehetséges paramétertartomány $(\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

18. Az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott térrészekhez válasszunk olyan koordinátarendszert, amelyre nézve a paramétertartomány téglatest és határozzuk is meg azt.
    a) $2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $y \le 0$
    b) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 \le 25$
    c) $x^2 + y^2 + z^6 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
    d) $(x - z)^2 + 4y^2 \le 4$, $0 \le z \le 1$

    Megoldás.
    a) gömbi koordinátákkal: $\mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi) = r \sin \vartheta \cos \varphi\mathbf{i} + r \sin \vartheta \sin \varphi\mathbf{j} + r \cos \vartheta\mathbf{k}$, $(r, \vartheta, \varphi) \in [\sqrt{2}, 2] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$.
    b) eltolt gömbi koordinátákkal: $\mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi) = (3 + r \sin \vartheta \cos \varphi)\mathbf{i} + (-2 + r \sin \vartheta \sin \varphi)\mathbf{j} + (1 + r \cos \vartheta)\mathbf{k}$, $(r, \vartheta, \varphi) \in [0, 5] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.
    c) az $x - y$ síkban polárkoordinátákat használhatunk, a sík egy pontja feletti egyenesszakaszt pedig konstans határokkal paraméterezhetjük, pl. $\mathbf{r}(\rho, \phi, h) = \rho \cos \phi\mathbf{i} + \rho \sin \phi\mathbf{j} + \sqrt[6]{1 - \rho^2}h\mathbf{k}$, $(\rho, \phi, h) \in [0, 1] \times [0, \pi/2] \times [-1, 1]$.
    d) induljuk ki a szokásos hengerkoordinátákból, de y irányban felére összenyomva, x irányban pedig a z koordinátával arányosan eltolva: $\mathbf{r}(\rho, \phi, h) = (h + \rho \cos \phi)\mathbf{i} + \frac{1}{2}\rho \sin \phi\mathbf{j} + h\mathbf{k}$, $(\rho, \phi, h) \in [0, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, 1]$.