

# Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

## 2. feladatsor: Potenciálfüggvény, alakzatok paraméterezése

---

- Potenciálos-e az alábbi vektormező? Ha igen, adjuk meg egy potenciálját.
  - $\mathbf{u}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
  - $\mathbf{u}(x, y, z) = ze^{x+\sin y}\mathbf{i} + ze^{x+\sin y} \cos y\mathbf{j} + e^{x+\sin y}\mathbf{k}$
  - $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^2 + yz)\mathbf{i} + (y - x^2)\mathbf{j} + (z + xy)\mathbf{k}$
- Centrális vektormezőnek nevezzük a  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$  alakú vektormezőket, ahol  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tetszőleges differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy minden centrális vektormező potenciálos és határozzuk meg egy potenciálfüggvényt.
- Mutassuk meg, hogy  $\mathbf{u}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + 3xz^2\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$  vektorpotenciálos és adjuk meg egy vektorpotenciálját.
- Adjuk meg az alábbi görbék egy paraméterezését:
  - $A = (2, 1, 5)$  és  $B = (-1, 9, 11)$  pontokat összekötő szakasz
  - origó középpontú,  $a$  és  $b$  hosszúságú, az  $x$  ill.  $y$  tengelyekkel párhuzamos féltengelyekkel rendelkező ellipszis
  - az  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  és  $x + 2y = 0$  egyenletű felületek metszészvonala.
- Milyen alakzat paraméterezése az  $\mathbf{r}(t) = R(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}) + at\mathbf{k}$ , ha  $R > 0$ ?
- Adjuk meg az  $\mathbf{a} = (2, 1, 9)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 5, 10)$  és  $\mathbf{c} = (0, 4, 0)$  helyvektorú pontokat tartalmazó sík egy paraméteres egyenletét és ennek segítségével írjuk fel egy normálvektorát.
- Tekintsük az origó középpontú egységgömb felszínét a szokásos paraméterezéssel. Adjuk meg az alábbi egyenlőtlenségek által meghatározott daraboknak megfelelő paramétertartományt:
  - $z \geq 0$
  - $x^2 + y^2 \leq z^2$
  - $z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$
  - $x \geq 0$
- Az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott térrészekhez válasszunk olyan koordinátarendszert, amelyre nézve a paramétertartomány téglatest és határozzuk is meg azt.
  - $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ ,  $x \geq 0$ ,  $x^2 + y^2 \leq z^2$ ,  $z \geq 0$
  - $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $x \leq y$ ,  $0 \leq y$ ,  $|z| \leq 2$

### További gyakorló feladatok

- Potenciálos-e az alábbi vektormező? Ha igen, adjuk meg egy potenciálját.
  - $\mathbf{u}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$
  - $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$
  - $\mathbf{u}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$
- Legyen  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható és tekintsük a  $\mathbf{v}(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  vektormezőt. Mutassuk meg, hogy  $\mathbf{v}$  potenciálos és határozzuk meg egy potenciálfüggvényét.
- Az origón átmenő tengely körül  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  szögsebességgel forgó test  $\mathbf{r}$  helyvektorú pontjának sebessége  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$ . Határozzuk meg  $\mathbf{u}$  egy vektorpotenciálját.
- Adjuk meg az  $x^2 + y^2 = z^2$  kúpfelület és az  $x + z = 1$  egyenletű sík metszészvonalának egy paraméterezését.

13. Az  $y^2 + z^2 = a^2$  és  $x^2 + z^2 = b^2$  egyenletű hengerfelületek metszészvonala  $a \neq b$  esetén két zárt görbéből áll. Adjuk meg ezek egy-egy paraméterezését az  $a < b$  esetben.
14. Adjuk meg az  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  egyenletű egyköpenyű forgáshiperboloid egy paraméteres egyenletét és határozzuk meg minden pontjában a normálvektorát.
15. Forgassuk meg az  $y = f(x)$  függvény grafikonját az  $x$  tengely körül. Határozzuk meg a kapott felület egy paraméterezését.
16. Egy egyenes körhenger tengelyének két végpontja  $A = (2, 2, 7)$  és  $B = (-1, 5, 3)$ . Adjuk meg a henger palástjának egy paraméterezését, ha a henger sugara 3.
17. Tekintsük azt a tóruszt, amelynek középköre  $R$  sugarú, az  $x - y$  síkban fekszik, középpontja az origó, és amelynek a keresztmetszete  $r < R$  sugarú kör. Adjuk meg a tórusz felületének egy paraméterezését.
18. Az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott térrészekhez válasszunk olyan koordinátarendszert, amelyre nézve a paramétertartomány téglatest és határozzuk is meg azt.
  - a)  $2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \leq 0$
  - b)  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 \leq 25$
  - c)  $x^2 + y^2 + z^6 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$
  - d)  $(x - z)^2 + 4y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$