

Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

3. feladatsor: Görbe ívhossza, görbementi integrál (megoldás)

1. Mi az $\mathbf{r}(t) = \frac{t^3}{3}\mathbf{i} + \frac{6\sqrt{2}}{5}t^{\frac{5}{2}}\mathbf{j} + \frac{9}{2}t^2\mathbf{k}$ görbe ívhossza a $t \in [1, 2]$ intervallumon?

Megoldás. A megadott függvény differenciálható, tehát az ívhossz a derivált hosszának integrálásával áll elő:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt \\ &= \int_1^2 \left| t^2\mathbf{i} + 3\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}\mathbf{j} + 9t\mathbf{k} \right| dt \\ &= \int_1^2 \sqrt{t^4 + 18t^3 + 81t^2} dt \\ &= \int_1^2 (t^2 + 9t) dt = \frac{2^3 - 1^3}{3} + \frac{9(2^2 - 1)}{2} = \frac{95}{6}. \end{aligned}$$

2. Tekintsük a síkon az

$$\mathbf{r}(t) = f(t) \cos t \mathbf{i} + f(t) \sin t \mathbf{j}$$

paraméteres egyenletű spirált (csigavonal), ahol f differenciálható függvény. Mekkora a görbe $0 \leq t \leq 2\pi$ szakaszának (azaz egy körülfordulásnak) ívhossza, ha

- a) $f(t) = t$ (arkhimédeszi spirál)
b) $f(t) = \alpha^t$ valamilyen rögzített $\alpha > 0$ értékkel (logaritmikus spirál)

Megoldás. Tetszőleges differenciálható f mellett az ívhossz így számolható:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} |(f'(t) \cos t - f(t) \sin t) \mathbf{i} + (f'(t) \sin t + f(t) \cos t) \mathbf{j}| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{f'(t)^2 + f(t)^2} dt. \end{aligned}$$

- a) Ha $f(t) = t$, akkor $f'(t) = 1$, tehát

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} dt \\ &= \left[\frac{t\sqrt{1 + t^2} + \operatorname{arsinh} t}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} 2\pi \end{aligned}$$

- b) Ha $f(t) = \alpha^t$, akkor $f'(t) = (\ln \alpha)\alpha^t$, tehát

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \ln^2 \alpha} \alpha^t dt \\ &= \left[\frac{\sqrt{1 + \ln^2 \alpha}}{\ln \alpha} \alpha^t \right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{1 + \ln^2 \alpha}}{\ln \alpha} (\alpha^{2\pi} - 1) \end{aligned}$$

3. Integráljuk az $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 4x + 9yz}$ skalármezőt az $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ görbe mentén $t = 0$ és $t = 1$ paraméterértékek között.

Megoldás. A skalármező folytonos, a paraméterezés differenciálható, tehát az alábbi (egyváltozós) integrállal számíthatjuk a görbementi integrált:

$$\begin{aligned} \int f \, ds &= \int_0^1 f(\mathbf{r}(t)) |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} |2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}| \, dt \\ &= \int_0^1 (1 + 4t^2 + 9t^4) \, dt = 1 + \frac{4}{3} + \frac{9}{5} = \frac{62}{15}. \end{aligned}$$

4. Egy vékony L hosszúságú drót vonalmenti sűrűsége egyik végétől a másikig lineárisan változik μ és 2μ között. A drótból körvonalat hajlítunk. Hol lesz a kapott test tömegközéppontja?

Megoldás. Válasszunk úgy koordinátarendszert, hogy a kör középpontja az origó, és a drót két (egybeeső) vége az x tengely pozitív felén van. Ekkor egy paraméterezés $\mathbf{r}(t) = r \cos t \mathbf{i} + r \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, ahol $r = \frac{L}{2\pi}$, a sűrűség $\mu(1 + \frac{t}{2\pi})$. A tömegközéppont koordinátáit az elsőrendű nyomatékok és a tömeg hányadosa adják. $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = r |-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}| = r$ alapján

$$x_{\text{tk}} = \frac{\int_0^{2\pi} r \cos t \mu \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right) r \, dt}{\int_0^{2\pi} \mu \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right) r \, dt} = \frac{0}{3\pi r \mu} = 0$$

és

$$y_{\text{tk}} = \frac{\int_0^{2\pi} r \sin t \mu \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right) r \, dt}{\int_0^{2\pi} \mu \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right) r \, dt} = \frac{-r^2 \mu}{3\pi r \mu} = -\frac{r}{3\pi}.$$

5. Mennyi az $\mathbf{u}(x, y, z) = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$ vektormező integrálja az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ görbe mentén $t = 0$ -tól $t = 1$ -ig?

Megoldás. Folytonos vektormezőt kell integrálni differenciálható paraméterezéssel megadott görbén, ezt egyváltozós integrállal lehet számolni:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) \, dt \\ &= \int_0^1 ((t^4 - t^2)\mathbf{i} + 2t^5\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) \, dt \\ &= \int_0^1 (-t^2 - 2t^5 + 4t^6) \, dt = -\frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{7} = -\frac{17}{105}. \end{aligned}$$

6. Integráljuk az $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

vektormezőt az $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(t) = (2^{t+1} - 1)\mathbf{i} + \frac{t}{4 + 2t^2}\mathbf{j} + \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)e^{(1-t)^2}\mathbf{k}$$

térgörbe mentén a $t = 0$ és $t = 1$ paraméterértékeknek megfelelő pontok között.

Megoldás.

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}(x, y, z) = \left(\frac{\partial 2z}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial 2z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0,$$

tehát létezik potenciálfüggvény. Valóban, $f(x, y, z) = xy + z^2$ választással $\mathbf{u} = \operatorname{grad} f$. Használhatjuk a Newton-Leibniz-tételt, ekkor az integrál meghatározásához elég a két végpontot ismerni: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ és $\mathbf{r}(1) = 3\mathbf{i} + \frac{1}{6}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$, tehát

$$\int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(1)) - f(\mathbf{r}(0)) = 1.$$

7. Mi az $\mathbf{u}(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ vektormező integrálja
- az origó körüli R sugarú kör mentén pozitív irányítással
 - az origó körüli R sugarú kör mentén negatív irányítással
 - az $(5, 9)$ pont körüli 2 sugarú kör mentén pozitív irányítással
 - az $\mathbf{r}(t) = \alpha\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ egyenes mentén ($\alpha > 0$) $t = -\infty$ -től $t = +\infty$ -ig?

Megoldás.

- a) Egy differenciálható paraméterezés $\mathbf{r}(t) = R \cos t \mathbf{i} + R \sin t \mathbf{j}$, ahol $t \in [0, 2\pi]$, a paraméter növekedése pozitív irányú körfordulást eredményez. Az integrál

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R \sin t}{R^2} \mathbf{i} + \frac{R \cos t}{R^2} \mathbf{j} \right) \cdot (-R \sin t \mathbf{i} + R \cos t \mathbf{j}) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

- b) Az előbbi görbe megfordításán integráljuk ugyanazt a vektormezőt, tehát az integrál -2π .
- c)

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2) - (x \cdot 2x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(x^2+y^2) - (y \cdot 2y)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

ha $(x, y) \neq (0, 0)$. A megadott körvonal körül találunk olyan négyzetet, ami nem tartalmazza az origót, ezen létezik potenciál. A körvonal zárt görbe, tehát a Newton-Leibniz-tétel szerint az integrál 0.

- d) A görbe végtelen hosszú, de differenciálható függvénnyel adott (tehát lokálisan rektifikálható), így a vonalmenti integrál improprius integrálként értelmes lehet:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-t}{\alpha^2+t^2} \mathbf{i} + \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{j} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\alpha}\right)^2} dt = \left[\arctan \frac{t}{\alpha} \right]_{t=-\infty}^{t=\infty} = \pi. \end{aligned}$$

További gyakorló feladatok

8. Mi az $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$ görbe ívhossza a $t \in [0, 2]$ intervallumon?

Megoldás.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt \\ &= \int_0^2 \left| (e^t \cos t - e^t \sin t) \mathbf{i} + (e^t \sin t + e^t \cos t) \mathbf{j} + e^t \mathbf{k} \right| dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{3} e^t = \sqrt{3}(e^2 - 1). \end{aligned}$$

9. Mi az $\mathbf{r}(t) = (\sinh t + \cosh t)\mathbf{i} + (\cosh t - \sinh t)\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$ görbe ívhossza a $t \in [0, \ln 2]$ intervallumon?

Megoldás.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt \\ &= \int_0^2 |(\cosh t + \sinh t)\mathbf{i} + (\sinh t - \cosh t)\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}| dt \\ &= \int_0^2 2 \cosh t = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

10. Mennyi az

$$\mathbf{r}(t) = 2 \sin(t)\mathbf{i} + 2 \cos(t)\mathbf{j} + \left(\frac{t^2}{2} - \ln t\right)\mathbf{k}$$

térgörbe $1 \leq t \leq \sqrt{e}$ paraméterértékeknek megfelelő részének ívhossza?

Megoldás.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\sqrt{e}} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt \\ &= \int_1^{\sqrt{e}} \left| 2 \cos t \mathbf{i} - 2 \sin t \mathbf{j} + \left(t - \frac{1}{t}\right) \mathbf{k} \right| dt \\ &= \int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{2 + \frac{1}{t^2} + t^2} = \int_1^{\sqrt{e}} \left(t + \frac{1}{t}\right) = \left[\frac{t^2}{2} + \ln t\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

11. Egy homogén tömegeloszlású vékony kötelet két végénél fogva lógatunk. Az általa meghatározott görbe egy paraméterezése $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cosh t\mathbf{j}$, $t \in [-1, 1]$. Hol van a kötéltömegközéppontja?

Megoldás. A görbe az y tengelyre szimmetrikus, tehát $x_{\text{tk}} = 0$. A másik komponens az elsőrendű nyomaték és a tömeg hányadosa:

$$\begin{aligned} y_{\text{tk}} &= \frac{\int_{-1}^1 \cosh t |\mathbf{i} + \sinh t\mathbf{j}| dt}{\int_{-1}^1 |\mathbf{i} + \sinh t\mathbf{j}| dt} \\ &= \frac{\int_{-1}^1 \cosh^2 t dt}{\int_{-1}^1 \cosh t dt} \\ &= \frac{1 + \cosh 1 \sinh 1}{2 \sinh 1} \approx 1,197. \end{aligned}$$

12. Homogén tömegeloszlású m tömegű vékony drótból a oldalú négyzet alakú keretet hajlítunk. Határozzuk meg az egyik átlóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

Megoldás. Legyen a koordinátarendszer olyan, hogy a két átló az x illetve y tengelyre esik. Ekkor a négy oldal egy-egy paraméterezése (mindegyiknél $t \in [0, 1]$):

$$\mathbf{r}(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}((1-t)\mathbf{i} + t\mathbf{j})$$

$$\mathbf{r}(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}(-t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j})$$

$$\mathbf{r}(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}((-1+t)\mathbf{i} - t\mathbf{j})$$

$$\mathbf{r}(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}(t\mathbf{i} + (-1+t)\mathbf{j})$$

A négy szakaszon $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ egyaránt a (konstans).

A $\pi/2$ szögű forgásszimmetria miatt a két tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték megegyezik. Pl. az x tengelyre nézve:

$$\begin{aligned}\Theta &= \int_0^1 \frac{m}{4a} \frac{a^2}{2} t^2 a \, dt + \int_0^1 \frac{m}{4a} \frac{a^2}{2} (1-t)^2 a \, dt + \int_0^1 \frac{m}{4a} \frac{a^2}{2} (-t)^2 a \, dt + \int_0^1 \frac{m}{4a} \frac{a^2}{2} (-1+t)^2 a \, dt \\ &= \frac{ma^2}{8} \int_0^1 (4t^2 - 4t + 2) \, dt = \frac{ma^2}{8} \left(4 \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{ma^2}{6}.\end{aligned}$$

13. Mi az $\mathbf{u}(x, y, z) = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ vektormező integrálja az AB szakasz mentén, ha $A = (1, -2, 3)$, $B = (2, 1, 4)$?

Megoldás. Használjuk az $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$ paraméterezést ($t \in [0, 1]$), ezzel

$$\begin{aligned}\int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) \, dt \\ &= \int_0^1 ((-2 + 3t + 3 + t)\mathbf{i} + (1 + t + 3 + t)\mathbf{j} + (1 + t - 2 + 3t)\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dt \\ &= \int_0^1 (12 + 14t) \, dt = 19.\end{aligned}$$

14. Legyen $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ az alábbi vektormező:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + (y - z^2)\mathbf{j} + (2z - xy)\mathbf{k}$$

Határozza meg az \mathbf{u} integrálját

- az origó középpontú, x - y síkban felvő egységkörvonalon a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárási irányban
- ezen körvonal $y \geq 0$ félkörén az előbbivel megegyező irányban.

Megoldás. A paraméterezés legyen $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$, ekkor

a)

$$\begin{aligned}\int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} - \cos t \sin t \mathbf{k}) \cdot (-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t - \cos t \sin^2 t) \, dt = 0\end{aligned}$$

b)

$$\int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi} (\cos t \sin t - \cos t \sin^2 t) \, dt = 0.$$

15. Integráljuk az $\mathbf{u}(x, y, z) = (2xy - z)\mathbf{i} + (x^2 + z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$ vektormezőt az $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1$, $z = 2$ egyenletrendszerrel megadott ellipszisen a z tengely pozitív fele irányából nézve pozitív körüljárás szerint.

Megoldás. A deriváltmátrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x & -1 \\ 2x & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ami szimmetrikus, tehát \mathbf{u} potenciális. A megadott görbe zárt, tehát a Newton-Leibniz-tétel alapján az integrál 0.