

# Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

## 4. feladatsor: Felszín, felszíni és felületi integrál (megoldás)

1. Forgassuk meg az  $y = f(x)$  differenciálható függvény grafikonját az  $x$  tengely körül. Írjuk fel a kapott forgástest egy paraméteres egyenletét. Mekkora az  $a \leq x \leq b$  sávba eső rész felszíne?

*Megoldás.*  $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + f(u) \cos v\mathbf{j} + f(u) \sin v\mathbf{k}$  paraméterezéssel

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= (\mathbf{i} + f'(u) \cos v\mathbf{j} + f'(u) \sin v\mathbf{j}) \times (-f(u) \sin v\mathbf{j} + f(u) \cos v\mathbf{k}) \\ &= f(u)f'(u)\mathbf{i} - f(u) \cos v\mathbf{j} - f(u) \sin v\mathbf{k},\end{aligned}$$

ebből

$$A = \int_a^b \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dv du = 2\pi \int_a^b f(u) \sqrt{1 + f'(u)^2} du.$$

2. Határozzuk meg az  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  egyenletű gömbfelület  $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$  egyenletű hengeren belüli részének a felszínét.

*Megoldás.* Elég a  $z \geq 0$  felét kiszámolni. Legyen a paraméterezés  $\mathbf{r}(r, \phi) = r \cos \phi \mathbf{i} + r \sin \phi \mathbf{j} + \sqrt{4 - r^2} \mathbf{k}$ , ekkor

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= \left( \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j} - \frac{r}{\sqrt{4 - r^2}} \mathbf{k} \right) \times \left( -r \sin \phi \mathbf{i} + r \cos \phi \mathbf{j} \right) \\ &= \frac{r^2 \cos \phi}{\sqrt{4 - r^2}} \mathbf{i} + \frac{r^2 \sin \phi}{\sqrt{4 - r^2}} \mathbf{j} + r \mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}}$$

A paramétertartomány  $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $r \in [0, 2 \cos \phi]$ , tehát

$$\begin{aligned}A &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \phi} \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}} dr d\phi = -4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \sqrt{4 - r^2} \right]_{r=0}^{r=2 \cos \phi} d\phi \\ &= 8 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - |\sin \phi|) d\phi = 8\pi - 16 \int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi = 8\pi - 16.\end{aligned}$$

3. Hol van a tömegközéppontja az origó középpontú, vékony,  $R$  sugarú, egyenletes  $\mu$  felületi tömegsűrűségű gömbhéj,  $z \geq 0$  féltérbe eső részének?

*Megoldás.*  $\mathbf{r}(\theta, \varphi) = R \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + R \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + R \cos \theta \mathbf{k}$ ,  $(\theta, \varphi) \in [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} &= (R \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + R \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - R \sin \theta \mathbf{k}) \times (-R \sin \theta \sin \varphi \mathbf{i} + R \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j}) \\ &= R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \mathbf{i} + R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \mathbf{j} + R^2 \sin \theta \cos \theta \rightsquigarrow \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = R^2 \sin \theta\end{aligned}$$

tömeg:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mu R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \mu R^2$$

tömegközéppont  $x, y$  koordinátája:

$$x_{\text{tk}} = \frac{1}{2\pi\mu R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mu R^2 \sin \theta (R \sin \theta \cos \varphi) d\theta d\varphi = 0$$

$$y_{\text{tk}} = \frac{1}{2\pi\mu R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mu R^2 \sin \theta (R \sin \theta \sin \varphi) d\theta d\varphi = 0$$

tömegközéppont  $z$  koordinátája:

$$z_{\text{tk}} = \frac{1}{2\pi\mu R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mu R^2 \sin \theta (R \cos \theta) d\theta d\varphi$$

$$= \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{R}{2} \left[ \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{R}{2}$$

4. Az  $\mathbf{r}(u, v) = e^u \cos v \mathbf{i} + e^u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}$ ,  $u \leq 0$ ,  $v \in [0, 2\pi]$  tölcser felületi tömegsűrűségét a  $\mu(x, y, z) = 1 + x$  függvény írja le. Mekkora a tömege?

*Megoldás.*

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (e^u \cos v \mathbf{i} + e^u \sin v \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-e^u \sin v \mathbf{i} + e^u \cos v \mathbf{j})$$

$$= -e^u \cos v \mathbf{i} - e^u \sin v \mathbf{j} + e^{2u} \mathbf{k}$$

A megadott paraméterezést használva  $\mu(\mathbf{r}(u, v)) = 1 + e^u \cos v$ , tehát a tömeg:

$$m = \int \mu dS = \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} \mu(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dv du$$

$$= \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} (1 + e^u \cos v) \sqrt{e^{2u} + e^{4u}} dv du$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^0 e^u \sqrt{1 + e^{2u}} du$$

$$= 2\pi \int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \cosh^2 t dt$$

$$= 2\pi \left[ \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2t \right]_0^{\operatorname{arsinh} 1} = \sqrt{2}\pi + \pi \operatorname{arsinh} 1 = 7,2117\dots,$$

ahol az  $u$  szerinti integrál  $e^u = \sinh t$ ,  $e^u du = \cosh t dt$  helyettesítéssel számolható.

5. Mi az  $\mathbf{u}(x, y, z) = x \mathbf{i} - y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$  vektormező integrálja az  $\mathbf{r}(u, v) = (u + 2v) \mathbf{i} + v \mathbf{j} + (u - v) \mathbf{k}$  felület  $(u, v) \in [0, 3] \times [0, 1]$  darabján  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  irányítás mellett?

*Megoldás.*

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\mathbf{i} + \mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(u, v)) = (u + 2v) \mathbf{i} - v \mathbf{j} + (u - v) \mathbf{k}$$

$$\iint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \int_0^1 \int_0^3 (-6v) du dv = -9$$

6. Határozza meg az  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (x^2 + 2xy - xz) \mathbf{i} - y^2 \mathbf{j} - 2xz \mathbf{k}$$

vektormező integrálját az origó középpontú  $R = 2$  sugarú gömb felületére kifelé mutató irányítás mellett.

*Megoldás.* Használjuk a szokásos paraméterezést:  $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = R(\sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k})$ , ekkor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = R^2 \sin \vartheta (\sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k}),$$

ami kifelé mutat, a paramétertartomány  $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) &= R^2(\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi - \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi) \mathbf{i} \\ &\quad - R^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \mathbf{j} - R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Az integrál eszerint

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\varphi d\vartheta \\ &= R^4 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \sin^4 \vartheta \cos^3 \varphi + 2 \sin^4 \vartheta \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. - \sin^4 \vartheta \sin^3 \varphi - \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos \varphi \right) d\varphi d\vartheta \\ &= -\pi R^4 \int_0^\pi \cos \vartheta \sin^3 \vartheta d\vartheta = 0. \end{aligned}$$

## További gyakorló feladatok

7. Mekkora az  $\mathbf{r}(u, v) = e^u(\cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j} + \mathbf{k})$  felület  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, \pi/4]$  paramétertartománynak megfelelő darabjának a felszíne?

*Megoldás.*

$$|e^u(\cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times e^u(-\sin v \mathbf{i} + \cos v \mathbf{j})| = e^{2u} |-\cos v \mathbf{i} - \sin v \mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{2} e^{2u}$$

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/4} \sqrt{2} e^{2u} dv du = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} (e^2 - 1)$$

8. Mekkora a felszíne az  $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + uv \mathbf{k}$$

felület  $u^2 + v^2 \leq 1$  paramétertartománynak megfelelő darabjának?

*Megoldás.*  $|(\mathbf{i} + v \mathbf{k}) \times (\mathbf{j} + u \mathbf{k})| = |-\mathbf{v} \mathbf{i} - u \mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{1 + u^2 + v^2}$

$$\begin{aligned} A &= \int_{u^2+v^2 \leq 1} \sqrt{1 + u^2 + v^2} du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + r^2} \cdot r d\phi dr \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{3} (1 + r^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1) = 3,8294 \dots \end{aligned}$$

9. Számítsuk ki az  $M$  tömegű, homogén tömegeloszlású,  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $|z| \leq \frac{h}{2}$  egyenletű hengerpalást tehetetlenségi nyomatékát a koordinátatengelyekre nézve.

*Megoldás.* Egy paraméterezés  $\mathbf{r}(\phi, z) = R \cos \phi \mathbf{i} + R \sin \phi \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ , a paramétertartomány  $(\phi, z) \in [0, 2\pi] \times [-h/2, h/2]$ . Ekkor

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| = |(-R \sin \phi \mathbf{i} + R \cos \phi \mathbf{j}) \times \mathbf{k}| = R$$

A palást felszíne  $2\pi Rh$ , tehát a felületi tömegsűrűség  $\mu = \frac{M}{2\pi Rh}$ . A tehetetlenségi nyomatékok számolásához a koordinátafüggvények négyzeteit kell integrálni:

$$\begin{aligned}\int \mu x^2 dS &= \frac{M}{2\pi Rh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} R^2 \cos^2 \phi \cdot R d\phi dz = \frac{M}{2\pi Rh} R^3 h\pi = \frac{MR^2}{2} \\ \int \mu y^2 dS &= \frac{M}{2\pi Rh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 \phi \cdot R d\phi dz = \frac{M}{2\pi Rh} R^3 h\pi = \frac{MR^2}{2} \\ \int \mu z^2 dS &= \frac{M}{2\pi Rh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} z^2 \cdot R d\phi dz = \frac{M}{2\pi Rh} 2\pi R \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{Mh^2}{12}.\end{aligned}$$

Két ilyen integrál összege a harmadik tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, tehát rendre az  $x$ ,  $y$  és  $z$  tengelyekre:  $\frac{1}{12}M(h^2 + 6R^2)$ ,  $\frac{1}{12}M(h^2 + 6R^2)$  és  $MR^2$ .

10. Integráljuk a  $\mathbf{v}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + (2x + z)\mathbf{k}$  vektormezőt az  $\mathbf{r}(u, v) = (u + 2v)\mathbf{i} - v\mathbf{j} + (u^2 + 3v)\mathbf{k}$  felület  $0 \leq u \leq 3$ ,  $-2 \leq v \leq 0$  paramétertartománynak megfelelő darabján  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  irányítás mellett.

*Megoldás.*

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\mathbf{i} + 2u\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 2u\mathbf{i} + (-3 + 4u)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

és  $\mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v)) = (-uv - 2v^2)\mathbf{i} + (2u + u^2 + 7v)\mathbf{k}$  felhasználásával

$$\begin{aligned}\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} &= \int_{-2}^0 \int_0^3 \mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv \\ &= \int_{-2}^0 \int_0^3 ((-uv - 2v^2)\mathbf{i} + (2u + u^2 + 7v)\mathbf{k}) \cdot (2u\mathbf{i} + (-3 + 4u)\mathbf{j} - \mathbf{k}) du dv \\ &= \int_{-2}^0 \int_0^3 (-2u - u^2 - 7v - 2u^2v - 4uv^2) du dv = -11.\end{aligned}$$

11. Integráljuk a  $\mathbf{v}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + z^2\mathbf{k}$  vektormezőt az  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$  egyenletű felületen kifelé (a  $z$  tengelytől távolodó irányba) mutató irányítás mellett.

*Megoldás.* A felületet paraméterezhetjük  $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + \frac{1}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + \frac{1}{3} \cos \vartheta \mathbf{k}$  módon, ekkor

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} &= \left( \cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + \frac{1}{2} \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} - \frac{1}{3} \sin \vartheta \mathbf{k} \right) \times \left( -\sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{i} + \frac{1}{2} \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{j} \right) \\ &= \sin \vartheta \left( \frac{1}{6} \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + \frac{1}{3} \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + \frac{1}{2} \cos \vartheta \right).\end{aligned}$$

$\mathbf{v}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) = \left( \sin \vartheta \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \right) \mathbf{i} + \frac{1}{9} \cos^2 \vartheta \mathbf{k}$  felhasználásával az integrál:

$$\begin{aligned}\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{6} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \frac{1}{12} \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\cos^3 \vartheta}{18} \right) d\varphi d\vartheta \\ &= 2\pi \int_0^\pi \left( \frac{\sin^2 \vartheta}{12} + \frac{\cos^3 \vartheta}{18} \right) d\vartheta = \frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$