Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

5. feladatsor: Térfogati integrál (megoldás)

---

1. Határozzuk meg annak a tórusznak a térfogatát, aminek a középköre R sugarú, a keresztmetszete pedig r sugarú, $r < R$.

   Megoldás. Egy paraméterezés: $\mathbf{r}(\varrho,\vartheta,\varphi) = (R+\varrho\cos\vartheta)\cos\varphi\mathbf{i}+(R+\varrho\cos\vartheta)\sin\varphi\mathbf{j}+\varrho\sin\vartheta\mathbf{k}$, ahol $(\varrho,\vartheta,\varphi)\in[0,r]\times[0,2\pi]\times[0,2\pi]$, ebből

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varrho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} &= (\cos\vartheta\cos\varphi\mathbf{i}+\cos\vartheta\sin\varphi\mathbf{j}+\sin\vartheta\mathbf{k})\\ &\cdot(-\varrho\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i}-\varrho\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j}+\varrho\cos\vartheta\mathbf{k})\cdot\\ &\cdot((R+\varrho\cos\vartheta)(-\sin\varphi\mathbf{i}+\cos\varphi\mathbf{j})) = -\varrho(R+\varrho\cos\vartheta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varrho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right|\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varrho &= \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(R\varrho+\varrho^2\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\\ &= 4\pi^2\int_0^r R\varrho\,\mathrm{d}\varrho = 2\pi^2Rr^2\end{aligned}$$

2. Az $\left(\frac{x}{R}\right)^2+\left(\frac{y}{R}\right)^2+\left(\frac{2z}{h}\right)^{2n}\le 1$ tartományt homogén anyagú, m tömegű test tölti ki ($R,h>0$). Mekkora a koordinátatengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka? Mi történik, ha $n\to\infty$?

   Megoldás. Hengerkoordinátákkal: $\mathbf{r}(r,\phi,z) = r\cos\phi\mathbf{i}+r\sin\phi\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. A tartománynak megfelelő határok: $-h/2\le z\le h/2$, $0\le\phi\le 2\pi$, $0\le r\le R\sqrt{1-(2z/h)^{2n}}$. Ha a sűrűség ρ, akkor a tömeg:

$$\begin{aligned}m &= \int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R\sqrt{1-(2z/h)^{2n}}}\rho r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\\ &= \rho 2\pi\int_{-h/2}^{h/2}\frac{1}{2}R^2\left(1-(2z/h)^{2n}\right)\mathrm{d}z = \frac{2n\pi}{1+2n}hR^2\rho\end{aligned}$$

   amiből $\rho = \frac{(1+2n)m}{2n\pi hR^2}$. Elég az x és z irányú másodrendű nyomatékokat számolni:

$$\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R\sqrt{1-(2z/h)^{2n}}}\rho(r\cos\phi)^2r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z = \rho\frac{2hn^2\pi R^4}{1+6n+8n^2} = \frac{n}{1+4n}mR^2$$

   és

$$\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R\sqrt{1-(2z/h)^{2n}}}\rho z^2r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z = \rho\frac{2h^3n\pi R^2}{36+24n} = \frac{(1+2n)}{36+24n}mh^2$$

   amiből a tehetetlenségi nyomatékok:

$$\begin{aligned}I_{xx} = I_{yy} &= m\left(\frac{1+2n}{36+24n}h^2+\frac{n}{1+4n}R^2\right)\to\frac{mh^2}{12}+\frac{mR^2}{4}\\ I_{zz} &= \frac{2n}{1+4n}mR^2\to\frac{1}{2}mR^2\end{aligned}$$

   a limeszek az R sugarú, h magasságú henger tehetetlenségi nyomatékai.

3. Mennyi az m tömegű egyenletes tömegeloszlású vékony R sugarú kör alakú drót egy átmérőjére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka? Oldjuk meg a feladatot kétféleképp: a drótot kis keresztmetszetű tórusznak tekintve térfogati integrállal illetve vonalnak tekintve skalármező görbementi integrálásával.

   Megoldás. [I] A drótot olyan tórusznak gondolhatjuk, aminek középköre R sugarú, keresztmetszete pedig $\varepsilon \ll R$ sugarú. A tórusz egy paraméterezése $\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi) = (R+r\cos\vartheta)\cos\varphi\mathbf{i}+(R+r\cos\vartheta)\sin\varphi\mathbf{j}+r\sin\vartheta\mathbf{k}$, ahol $(r,\vartheta,\varphi) \in [0,\varepsilon]\times[0,2\pi]\times[0,2\pi]$. A paraméterezés Jacobi-determinánsa $r(R+r\cos\vartheta)$.
   Ha a tórusz sűrűsége ϱ, akkor tömege $m = \varrho V = \varrho\cdot 2\pi^2 R\varepsilon^2$, tehát $\varrho = \frac{m}{2\pi^2 R\varepsilon^2}$. A tehetetlenségi nyomaték:

$$\int_0^{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \varrho((R+r\cos\vartheta)^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta)r(R+r\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r$$
$$= \varrho\int_0^{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(rR^3\cos^2\varphi + 3r^2R^2\cos\vartheta\cos^2\varphi + 3r^3R\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + r^4\cos^3\vartheta\cos^2\varphi$$
$$+ r^3R\sin^2\varphi + r^4\cos\vartheta\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r$$
$$= \varrho\frac{1}{4}\pi^2\varepsilon^2(4R^3+5R\varepsilon^2) = \frac{1}{8}m(4R^2+5\varepsilon^2) \to \frac{mR^2}{2}$$

   Megoldás. [II] A drótót körvonalnak is gondolhatjuk, ekkor a sűrűsége végtelen, de lehet vonalmenti sűrűségről beszélni: $m = \mu\cdot 2\pi R$, tehát $\mu = \frac{m}{2\pi R}$. A körvonal legyen az x-y síkban, egy paraméterezés $\mathbf{r}(\varphi) = R\cos\varphi\mathbf{i} + R\sin\varphi\mathbf{j}$. A tehetetlenségi nyomaték:

$$\int_0^{2\pi}\mu R^2\cos^2\varphi R\,\mathrm{d}\varphi = \mu R^3\pi = \frac{mR^2}{2}$$

4. Számítsuk ki az m tömegű egyenletes tömegeloszlású vékony R sugarú gömbhéj egy átmérőjére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát. Oldjuk meg a feladatot kétféleképp: a gömbhéjat az $R+\epsilon$ és R sugarú gömbök közti térrésznek gondolva térfogati integrállal illetve felületnek tekintve skalármező felszíni integrálásával.

   Megoldás. [I] A gömbhéjra úgy gondolhatunk, hogy az origótól legalább R és legfeljebb $R+\epsilon$ távolságra lévő pontok halmaza, ahol $\epsilon \ll R$. Ha a sűrűsége ρ, akkor a tömege $m = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi[(R+\epsilon)^3 - R^3]$. A másodrendű nyomaték minden irányban egyforma, tehát a tehetetlenségi nyomaték ennek kétszerese. Gömbi koordinátákkal számolva

$$I = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_R^{R+\epsilon}\rho(r\cos\vartheta)^2r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi\rho\int_0^{\pi}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\int_R^{R+\epsilon}r^4\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{2m}{5}\frac{(R+\epsilon)^5 - R^5}{(R+\epsilon)^3 - R^3} \to \frac{2}{3}mR^2$$

   Megoldás. [II] A gömbhéjat felületnek idealizálva a sűrűség végtelenné válik, de beszélhetünk felületi sűrűségről: $m = \mu\cdot 4\pi R^2$, tehát $\mu = \frac{m}{4\pi R^2}$. $\mathbf{r}(\vartheta,\varphi) = R(\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k})$ paraméterezéssel

$$I = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mu(R\cos\vartheta)^2\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right|\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi R^2\mu\int_0^{\pi}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{2}{3}mR^2$$

További gyakorló feladatok

5. Mekkora a térfogata az $x^2+y^2+z^2 \le 4$ gömb és a $(x-1)^2+y^2 \le 1$ henger metszetének? (Viviani-féle test)

Megoldás. Hengerkoordináták: $\mathbf{r}(r,\phi,z) = r\cos\phi\mathbf{i} + r\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a henger alapköre: $-\pi/2 \le \phi \le \pi/2$, $0 \le r \le 2\cos\phi$

$$\begin{aligned}\iiint_V \mathrm{d}V &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\phi}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\phi}\sqrt{4-r^2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\ &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{8}{3}\left(1-\sqrt{1-\cos^2\phi}+\cos^2\phi\sqrt{1-\cos^2\phi}\right)\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin\phi+\cos^2\phi\sin\phi\right)\mathrm{d}\phi = \frac{32}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

6. Mennyi az $f(x,y,z) = xyz$ függvény integrálja az $x^2+y^2 \le R^2$, $0 \le z \le h$ hengeren?

   Megoldás. Hengerkoordináták: $\mathbf{r}(\varrho,\phi,z) = \varrho\cos\phi\mathbf{i} + \varrho\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$\int_0^h\int_0^R\int_0^{2\pi}\varrho^2\cos\phi\sin\phi z\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varrho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right|\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}z = \int_0^h z\,\mathrm{d}z\int_0^R\varrho^3\,\mathrm{d}\varrho\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\phi}{2}\,\mathrm{d}\phi = 0$$

7. Integráljuk az $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ függvényt az $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ gömbön.

   Megoldás. Gömbi koordináták: $\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi) = r\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + r\cos\vartheta\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r\sin\vartheta\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right|\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r &= \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r\sin\vartheta(r^2\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r\int_0^\pi\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{\pi^2}{4}R^4\end{aligned}$$

8. Integráljuk az $f(x,y,z) = xy$ függvényt az $x^2+y^2 \le z^2$ kúp $0 \le z \le 2$, $0 \le x$, $0 \le y$ egyenlőtlenségek által meghatározott darabján.

   Megoldás. Hengerkoordináták: $\mathbf{r}(\varrho,\phi,z) = \varrho\cos\phi\mathbf{i} + \varrho\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a paramétertartomány $0 \le \varrho \le z \le 2$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$. A függvény integrálja

$$\int_0^2\int_0^z\int_0^{\pi/2}\varrho^2\cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^2\frac{z^3}{3}\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}.$$

9. Tekintsük azt a homogén tömegeloszlású tömör tóruszt, amelynek középköre az $x-y$ síkban fekszik, középpontja az origó, a sugara pedig R, és amelynek a keresztmetszete r sugarú ($r < R$). Hol van a tömegközéppontja a $0 \le x \le y$ egyenlőtlenség által meghatározott darabjának?

   Megoldás. Egy paraméterezés: $\mathbf{r}(\varrho,\vartheta,\varphi) = (R+\varrho\cos\vartheta)\cos\varphi\mathbf{i}+(R+\varrho\cos\vartheta)\sin\varphi\mathbf{j}+\varrho\sin\vartheta\mathbf{k}$, ahol $(\varrho,\vartheta,\varphi) \in [0,r]\times[0,2\pi]\times[\pi/4,\pi/2]$, a Jacobi-determináns $\rho(R+\rho\cos\vartheta)$. A térfogat

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^r\rho(R+\rho\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi^2}{2}\int_0^r\rho R\,\mathrm{d}\varrho = \frac{\pi^2}{4}Rr^2,$$

   az elsőrendű nyomatékok pedig

$$\begin{aligned}M_x &= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^r(R+\varrho\cos\vartheta)\cos\varphi\rho(R+\rho\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^r\left(R^2+\frac{1}{2}\varrho^2\right)\rho\,\mathrm{d}\varrho = 2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{R^2r^2}{2}+\frac{r^4}{8}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_y &= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^r(R+\varrho\cos\vartheta)\sin\varphi\rho(R+\rho\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^r\left(R^2+\frac{1}{2}\varrho^2\right)\rho\,\mathrm{d}\varrho = 2\pi\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{R^2r^2}{2}+\frac{r^4}{8}\right)\end{aligned}$$

$$M_z = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^r \varrho \sin\vartheta \rho (R + \rho\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

A tömegközéppont koordinátái:

$$x_{\mathrm{tk}} = \frac{(2-\sqrt{2})(4R^2+r^2)}{2\pi R}$$
$$y_{\mathrm{tk}} = \frac{4R^2+r^2}{\sqrt{2}\pi R}$$
$$z_{\mathrm{tk}} = 0.$$

10. Számítsuk ki az M tömegű, a élhosszúságú (tömör) szabályos oktaéder tehetetlenségi nyomatékát a középpontján áthaladó tengelyekre vonatkozóan.

Megoldás. Válasszunk olyan derékszögű koordinátarendszert, amelynek tengelyein helyezkednek el a csúcsok. Ekkor a három tengely cseréjére szimmetrikus az alakzat, tehát elegendő pl. az M_{xx} és M_{xy} másodrendű nyomatékokat kiszámolni. Az utóbbi ráadásul 0, hiszen az integrandus előjelet vált az $x = 0$ síkra való tükrözéskor, az oktaéder pedig önmagába megy át. Az $x, y, z \geq 0$ térnyolcadba az oktaédernek is egynyolcada esik, ez egy tetraéder, amelynek az origóból kiinduló élei páronként merőlegesek és $a/\sqrt{2}$ hosszúak. Egy ilyen tetraéder térfogata $\frac{a^3}{12\sqrt{2}}$, tehát a sűrűség $\varrho = \frac{3M}{\sqrt{2}a^3}$. A tehetetlenségi nyomaték bármely tengelyre az M_{xx} másodrendű nyomaték kétszerese, szimmetria miatt ezt elég egy tetraéderre számolni:

$$\begin{aligned}
I_x &= I_y = I_z \\
&= 2 \cdot 8 \cdot \int_0^{a/\sqrt{2}} \int_0^{a/\sqrt{2}-x} \int_0^{a/\sqrt{2}-x-y} \varrho x^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 16\varrho \int_0^{a/\sqrt{2}} \int_0^{a/\sqrt{2}-x} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x - y\right) x^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 16\varrho \int_0^{a/\sqrt{2}} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{ax}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{2}\right) x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= 16\varrho \frac{a^5}{240\sqrt{2}} = \frac{a^5\rho}{15\sqrt{2}} = \frac{Ma^2}{10}.
\end{aligned}$$