Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

6. feladatsor: Integrálátalakító tételek (megoldás)

---

1. Mennyi az $\mathbf{u}(x,y,z) = x(x-2xy+2yz^2)\mathbf{i} - y(2x^2+4xyz+yz^2)\mathbf{j} + 2xz(x+2y+2yz)\mathbf{k}$ vektormező integrálja a $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ egységkocka felületén kifelé mutató irányítás mellett?

   Megoldás. Alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt:

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = (2x-4xy+2yz^2) - (2x^2+8xyz+2yz^2) + (2x^2+4xy+8xyz) = 2x$$

$$\iint_{\partial V} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 2x dx dy dz = 1$$

2. Határozzuk meg az $\mathbf{u}(x,y,z) = -xz\mathbf{i} + (-xy+2xz-yz)\mathbf{j} + (x^2+xz+z^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálját azon az irányított felületen, amely az $x^2+y^2 \le 1$, $0 \le z \le 10-x$ egyenlőtlenségek által meghatározott tartomány kifelé irányított felületéből a $z=0$ síkba eső alapkör elhagyásával keletkezik.

   Megoldás. Ha hozzávennénk az elhagyott körlapot a felülethez, akkor zárt felületet kapunk, amin az integrált a Gauss-Osztrogradszkij-tétellel is számolhatjuk.

$$\operatorname{div}\mathbf{u}(x,y,z) = \frac{\partial(-xz)}{\partial x} + \frac{\partial(-xy+2xz-yz)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2+xz+z^2)}{\partial z} = -z-x-z+x+2z = 0.$$

   Ha a megadott tartományt V jelöli, az elhagyott (kifelé irányított) körlapot pedig S, akkor

$$0 = \int_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} = \int_S \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} + \int_{\partial V\setminus S}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A},$$

   tehát a keresett integrál az S-en vett integrál ellentettje. (Úgy is lehetne érvelni, hogy $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ miatt az integrál csak a határoló irányított görbétől függ, tehát ugyanaz, mint az integrál S-en megfordított irányítással.)
   Paraméterezzük az S körlapot $\mathbf{r}(r,\phi) = r\cos\phi\mathbf{i} + r\sin\phi\mathbf{j}$ módon, $(r,\phi)\in[0,1]\times[0,2\pi]$. A normálvektor

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = (\cos\phi\mathbf{i}+\sin\phi\mathbf{j})\times(-r\sin\phi\mathbf{i}+r\cos\phi\mathbf{j}) = r\mathbf{k},$$

   de ez felfelé mutat, tehát a megfelelő irányításhoz az ellentettjét kell venni. A vektormező a felületen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(r,\phi)) = -r^2\cos\phi\sin\phi\mathbf{j} + r^2\cos^2\phi\mathbf{k},$$

   így a keresett integrál:

$$\begin{aligned} I &= -\int_S \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 (-r^2\cos\phi\sin\phi\mathbf{j} + r^2\cos^2\phi\mathbf{k})\cdot(-r\mathbf{k})\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. Integráljuk az $\mathbf{u}(x,y,z) = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ vektormezőt az ABC háromszögvonalon (ebben az irányban), ahol $A=(a,0,0)$, $B=(0,a,0)$ és $C=(0,0,a)$, $a>0$.

Megoldás. Alkalmazzuk a Stokes-tételt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = -2z\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$$

A háromszög paraméterezése: $\mathbf{r}(u,v) = a\mathbf{i} + ua(\mathbf{j}-\mathbf{i}) + va(\mathbf{k}-\mathbf{i})$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} &= \int_S \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{A} \\
&= a^3\int_0^1\int_0^{1-u}(-2v\mathbf{i} - 2(1-u-v)\mathbf{j} - 2u\mathbf{k})\cdot(\mathbf{j}-\mathbf{i})\times(\mathbf{k}-\mathbf{i})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= a^3\int_0^1\int_0^{1-u}(-2)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = -a^3
\end{aligned}$$

4. Integráljuk a $\mathbf{v}(x,y,z) = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$ vektormezőt az $x^2+y^2 = a^2$ egyenletű körön pozitív forgásiránnyal.

   Megoldás. Alkalmazzuk a Green-tételt, $\operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,z) = (x^2+y^2)\mathbf{k}$, tehát

$$\oint_{\partial\bigcirc}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\bigcirc}\operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{A} = \int_0^a\int_0^{2\pi} r^2 r\,d\varphi\,dr = 2\pi\frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{2}a^4$$

További gyakorló feladatok

5. Számítsuk ki az $\mathbf{u}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq 3$ tetraéder felületén kifelé mutató irányítás mellett.

   Megoldás. $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, ezért $\mathbf{u}$ zárt felületen vett integrálja 0.

6. Mennyi az $\mathbf{u}(x,y,z) = (xy+5z^2)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + (xz-y^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálja annak a tetraédernek a felületén kifelé mutató irányítás mellett, amelynek csúcsai $(1,-2,3)$, $(0,-1,1)$, $(0,-3,0)$, $(4,3,3)$?

   Megoldás. Zárt felületen kell integrálni, tehát használható a Gauss-Osztrogradszkij-tétel. Eszerint a kérdéses integrál megegyezik $\operatorname{div}\mathbf{u}$ integráljával a T "tömör" tetraéderen. Egy kényelmes paraméterezéshez tekintsük az $(1,-2,3)$ csúcsból kiinduló $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ élvektorokat:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \\
\mathbf{b} &= -\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k} \\
\mathbf{c} &= 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

   A paraméterezés legyen $\mathbf{r}(u,v,w) = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$, ahol $0\leq u\leq 1$, $0\leq v\leq 1-u$, $0\leq w\leq 1-u-v$. Ekkor a Jacobi-determináns $|\mathbf{abc}| = 20$.
   A vektormező divergenciája:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{u}(x,y,z) &= x + 3y \\
\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v,w)) &= -5 + 2u - 4v + 18w,
\end{aligned}$$

   tehát

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_T \operatorname{div}\mathbf{u}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1\int_0^{1-u}\int_0^{1-u-v} 20\,(-5+2u-4v+18w)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1\int_0^{1-u}\left(80 - 220u + 140u^2 - 340v + 400uv + 260v^2\right)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1\left(-\frac{10}{3} - 20u + 50u^2 - \frac{80u^3}{3}\right)\mathrm{d}u \\
&= -\frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

(Lehetett volna közvetlenül is számolni az integrált, de az laponként egy kétváltozós integrál kiszámításával jár, így egyszerűbb.)

7. Mennyi az $\mathbf{u}(x,y,z) = (xy+yz)\mathbf{i} + (x^2-yz)\mathbf{j} + (2xy+z^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálja az

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} & \text{ha } t \in [0,1] \\ \mathbf{i} + \mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k} & \text{ha } t \in [1,2] \\ (3-t)\mathbf{i} + (3-t)^2\mathbf{j} + \mathbf{k} & \text{ha } t \in [2,3] \\ (4-t)\mathbf{k} & \text{ha } t \in [3,4] \end{cases}$$

görbe $t \in [0,4]$ darabján?

Megoldás. A megadott görbe zárt, tehát használhatjuk a Stokes-tételt. Ehhez egy S irányított felületdarabot kell választani, aminek a pereme éppen az adott görbe. Egy kényelmes választás: $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i}+u^2\mathbf{j}+v\mathbf{k}$ (egy parabolikus henger darabja), ahol $(u,v) \in [0,1]\times[0,1]$. A parciális deriváltak vektoriális szorzata

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\mathbf{i} + 2u\mathbf{j}) \times \mathbf{k} = 2u\mathbf{i} - \mathbf{j},$$

ez a vektor az irányítással ellentétes irányba mutat.
A felületen az $\mathbf{u}$ vektormező rotációját kell integrálni:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{u}(x,y,z) &= (2x+y)\mathbf{i} + (-y)\mathbf{j} + (x-z)\mathbf{k} \\ \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) &= (2u+u^2)\mathbf{i} - u^2\mathbf{j} + (u-v)\mathbf{k}, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \\ &= -\int_0^1 \int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\ &= -\int_0^1 \int_0^1 (5u^2 + 2u^3)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = -\frac{13}{6}. \end{aligned}$$

8. Határozzuk meg az $\mathbf{u}(x,y,z) = (xy^2 - y^2z + x^2)\mathbf{i} + (x^2y - xyz)\mathbf{j} + (yz^2 - x^2z)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $\mathbf{r}(t) = (t^3+t)\mathbf{i} + \sqrt{4+3t^2-t^4}\mathbf{j}$ görbe $t \in [-2,2]$ intervallumnak megfelelő szakaszán.

Megoldás. Ha a görbéhez hozzáfűzzük a két végpontot összekötő szakaszt, akkor zárt görbét kapunk, tehát alkalmazható a Stokes-tétel.

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}(x,y,z) = (xy+z^2)\mathbf{i} + (-y^2+2xz)\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

A kapott zárt görbe (és így az általa határolt síkidom) a $z=0$ síkban van, ott a rotáció z irányú komponense 0, tehát a felületi integrál 0. Eszerint a kérdéses integrál ugyanaz, mintha a két végpontot összekötő egyenesszakaszon integrálnánk. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$ ($t \in [-10,10]$) ennek egy paraméterezése, tehát

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_{-10}^{10} \mathbf{u}(t,0,0) \cdot \mathbf{i}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-10}^{10} u_x(t,0,0)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-10}^{10} t^2\, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-10}^{10} = \frac{2000}{3}. \end{aligned}$$

9. Bizonyítsuk be az alábbi parciális integrálási formulát, ahol f skalármező, $\mathbf{u}$ vektormező, S peremes irányított felület:

$$\int_S (f \operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_{\partial S} f\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_S (\operatorname{grad} f \times \mathbf{u}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

Megoldás. A Stokes-tétel szerint

$$\int_{\partial S} f\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot}(f\mathbf{u}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

teljesül. A jobb oldalon az integrandust Leibniz-szabály szerint lehet kifejteni: $\operatorname{rot}(f\mathbf{u}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{u} + f \operatorname{rot} \mathbf{u}$. Ebből átrendezéssel adódik az állítás. A felhasznált Leibniz-szabály a komponensek kiszámolásával ellenőrizhető, pl.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(f\mathbf{u})_z &= \frac{\partial(fu_y)}{\partial x} - \frac{\partial(fu_x)}{\partial y} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}u_y + f\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}u_x - f\frac{\partial u_x}{\partial y} \\
&= (\operatorname{grad} f \times \mathbf{u})_z + f(\operatorname{rot} \mathbf{u})_z,
\end{aligned}$$

stb.

10. Bizonyítsuk be, hogy egy T síkidom területét

$$A = \oint_{\partial T} x\mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_{\partial T} y\mathbf{i} \cdot d\mathbf{r}$$

módon is számíthatjuk és ennek segítségével határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\mathbf{i} + \sin^3 t\mathbf{j}$ görbével határolt asztroid területét.

Megoldás. A $\mathbf{v}(x,y,z) = x\mathbf{j}$ és a $\mathbf{w}(x,y,z) = -y\mathbf{i}$ vektormezők rotációja $\operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,z) = \operatorname{rot}\mathbf{w}(x,y,z) = \mathbf{k}$, így a Green-tétel szerint valóban a területet kapjuk.
$\dot{\mathbf{r}}(t) = -3\cos^2 t \sin t\mathbf{i} + 3\sin^2 t \cos t\mathbf{j}$ miatt

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} \cos^3 t(3\sin^2 t \cos t)dt = 3\int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t dt \\
&= 3\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{16} + \frac{\cos 2t}{32} - \frac{\cos 4t}{16} - \frac{\cos 6t}{32}\right) dt = \frac{3\pi}{8}
\end{aligned}$$