

Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

6. feladatsor: Integrálátalakító tételek

1. Mennyi az $\mathbf{u}(x, y, z) = x(x - 2xy + 2yz^2)\mathbf{i} - y(2x^2 + 4xyz + yz^2)\mathbf{j} + 2xz(x + 2y + 2yz)\mathbf{k}$ vektormező integrálja a $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ egységkocka felületén kifelé mutató irányítás mellett?
2. Határozzuk meg az $\mathbf{u}(x, y, z) = -xz\mathbf{i} + (-xy + 2xz - yz)\mathbf{j} + (x^2 + xz + z^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálját azon az irányított felületen, amely az $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 10 - x$ egyenlőtlen-ségek által meghatározott tartomány kifelé irányított felületéből a $z = 0$ síkba eső alapkör elhagyásával keletkezik.
3. Integráljuk az $\mathbf{u}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ vektormezőt az ABC háromszögvonalon (ebben az irányban), ahol $A = (a, 0, 0), B = (0, a, 0)$ és $C = (0, 0, a), a > 0$.
4. Integráljuk a $\mathbf{v}(x, y, z) = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 = a^2$ egyenletű körön pozitív forgásiránnyal.

További gyakorló feladatok

5. Számítsuk ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 3$ tetraéder felületén kifelé mutató irányítás mellett.
6. Mennyi az $\mathbf{u}(x, y, z) = (xy + 5z^2)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + (xz - y^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálja annak a tetra-édernek a felületén kifelé mutató irányítás mellett, amelynek csúcsai $(1, -2, 3), (0, -1, 1), (0, -3, 0), (4, 3, 3)$?
7. Mennyi az $\mathbf{u}(x, y, z) = (xy + yz)\mathbf{i} + (x^2 - yz)\mathbf{j} + (2xy + z^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálja az

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} & \text{ha } t \in [0, 1] \\ \mathbf{i} + \mathbf{j} + (t - 1)\mathbf{k} & \text{ha } t \in [1, 2] \\ (3 - t)\mathbf{i} + (3 - t)^2\mathbf{j} + \mathbf{k} & \text{ha } t \in [2, 3] \\ (4 - t)\mathbf{k} & \text{ha } t \in [3, 4] \end{cases}$$

görbe $t \in [0, 4]$ darabján?

8. Határozzuk meg az $\mathbf{u}(x, y, z) = (xy^2 - y^2z + x^2)\mathbf{i} + (x^2y - xyz)\mathbf{j} + (yz^2 - x^2z)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $\mathbf{r}(t) = (t^3 + t)\mathbf{i} + \sqrt{4 + 3t^2 - t^4}\mathbf{j}$ görbe $t \in [-2, 2]$ intervallumnak megfelelő szakaszán.
9. Bizonyítsuk be az alábbi parciális integrálási formulát, ahol f skalármező, \mathbf{u} vektormező, S peremes irányított felület:

$$\int_S (f \operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial S} f \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} - \int_S (\operatorname{grad} f \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{A}$$

10. Bizonyítsuk be, hogy egy T síkidom területét

$$A = \oint_{\partial T} x\mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} = - \oint_{\partial T} y\mathbf{i} \cdot d\mathbf{r}$$

módon is számíthatjuk és ennek segítségével határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\mathbf{i} + \sin^3 t\mathbf{j}$ görbével határolt asztroid területét.