

Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

7. feladatsor: Szukcesszív approximáció, néhány egyenlettípus (megoldás)

1. Számoljuk ki az $y'(x) = y(x)^2 - (x+1)y(x) + 1$ differenciálegyenlet szukcesszív approximációjával kapott első két közelítő függvényt, ha a kezdeti feltétel $y(0) = 1$.

Megoldás. A 0. függvény konstans $\varphi_0(x) = y(0) = 1$, a függvényt sorozat többi tagját rekurzióval definiáljuk:

$$\varphi_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x (\varphi_k(\xi)^2 - (\xi+1)\varphi_k(\xi) + 1) d\xi,$$

ennek alapján

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}$$

$$\varphi_2(x) = 1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20}.$$

2. Számoljuk ki az $y'(x) = y(x)$ differenciálegyenlet szukcesszív approximációjával kapott első négy közelítő függvényt, ha a kezdeti feltétel $y(0) = 1$.

Megoldás. A $\varphi_0(x) = y(0) = 1$ függvényből kiindulva

$$\varphi_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x \varphi_k(\xi) d\xi,$$

ennek alapján a függvényt sorozat első négy tagja

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = 1 + x$$

$$\varphi_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$\varphi_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$\varphi_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

Ebből egyébként rájöhettünk az általános tag alakjára:

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!},$$

ezt teljes indukcióval lehet bizonyítani. A kapott függvényt sorozat minden korlátos intervallumon egyenletesen konvergál az $y(x) = e^x$ függvényhez, ez megoldja a Cauchy-feladatot.

3. Oldjuk meg az $y' = e^{-y} \sin^2 x$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet szétválasztható, ráadásul e^{-y} sehol sem 0, tehát mindkét oldalt eloszthatjuk vele: $e^y y' = \sin^2 x$. Ezután integráljuk mindkét oldalt $x_0 = 0$ -tól x -ig:

$$\int_0^x e^{y(\xi)} y'(\xi) d\xi = \int_0^x \sin^2 \xi d\xi = \int_0^x \frac{1 - \cos 2\xi}{2} d\xi$$

$$e^{y(x)} - e^{y(0)} = \left[\frac{\xi}{2} - \frac{\sin 2\xi}{4} \right]_{\xi=0}^{\xi=x}$$

$$e^{y(x)} - 1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x.$$

Ebből $y(x)$ kifejezhető:

$$y(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right).$$

4. Egy test zuhan függőlegesen a gravitáció és a sebesség négyzetével arányos közegellenállás hatására. A mozgást az $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ magasság-idő-függvény írja le, ami eleget tesz a

$$y''(t) = -g + \alpha y'(t)^2$$

differenciálegyenletnek. A $t = 0$ pillanatban a test áll és $y(0) = h$ magasan tartózkodik. Hogyan mozog ezután?

Megoldás. $v = y'$ helyettesítéssel $v' = -g + \alpha v^2$ szétválasztható, a megoldása

$$t = \int_0^t d\tau = \int_0^t \frac{v'(\tau)}{\alpha v(\tau)^2 - g} d\tau = \int_0^{v(t)} \frac{1}{\alpha v^2 - g} dv = -\frac{\operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{g}} v(t) \right)}{\sqrt{\alpha g}},$$

amiből $v(t)$ meghatározható:

$$v(t) = -\sqrt{\frac{g}{\alpha}} \tanh(\sqrt{\alpha g} t)$$

ezt integrálva

$$\begin{aligned} y(t) &= h + \int_0^t v(\tau) d\tau = h - \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \int_0^t \tanh(\sqrt{\alpha g} \tau) d\tau \\ &= h - \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \left[\frac{\ln \cosh(\sqrt{\alpha g} t)}{\sqrt{\alpha g}} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = h - \frac{1}{\alpha} \ln \cosh(t\sqrt{g\alpha}) \end{aligned}$$

Érdeemes a kapott függvényt összehasonlítani a közegellenállás nélküli zuhanást leíró jól ismert $h - \frac{g}{2}t^2$ függvénnyel. Ehhez fejtsük sorba a megoldást $t = 0$ körül (vagy $\alpha = 0$ körül α szerint, ez ugyanazt adja):

$$h - \frac{g}{2}t^2 + \frac{g^2\alpha}{12}t^4 - \frac{g^3\alpha^2}{45}t^6 + \dots$$

5. Oldjuk meg az $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ differenciálegyenletet $y(3) = 4$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Osszuk el mindkét oldalt x -szel (nem 0 az $x_0 = 3$ pont egy környezetében):

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

tehát a jobb oldal csak y/x -től függ. $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel és $xu = y$, $u + xu' = y'$ felhasználásával $x > 0$ esetén az

$$u + xu' = u + \sqrt{1 + u^2}$$

egyenletet kapjuk, amiből

$$\begin{aligned} \frac{u'}{\sqrt{1 + u^2}} &= \frac{1}{x} \\ \int_3^x \frac{u'(\xi)}{\sqrt{1 + u(\xi)^2}} d\xi &= \int_3^x \frac{1}{\xi} d\xi \\ \operatorname{arsinh} u(x) - \operatorname{arsinh} \frac{4}{3} &= \ln \frac{x}{3} \end{aligned}$$

és így a megoldás

$$y(x) = xu(x) = x \sinh \left(\operatorname{arsinh} \frac{4}{3} + \ln \frac{x}{3} \right).$$

További gyakorló feladatok

6. Számoljuk ki az $y'(x) = \frac{y(x)}{x}$ differenciálegyenlet szukcesszív approximációjával kapott első három közelítő függvényt, ha a kezdeti feltétel $y(1) = 1$.

Megoldás. A kezdeti függvény konstans $\varphi_0(x) = 1$, a továbbiakat

$$\varphi_{k+1}(x) = 1 + \int_1^x \frac{\varphi_k(\xi)}{\xi} d\xi$$

módon definiáljuk. Ebből

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \ln x$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2} + \frac{(\ln x)^3}{6}$$

adódik, ami alapján rájöhethetünk, hogy

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{(\ln x)^n}{n!},$$

ennek limesze ($x > 0$ esetén) $y(x) = e^{(\ln x)} = x$, ami megoldja a kezdetiérték-problémát.

7. Szukcesszív approximáció segítségével határozzuk meg az $y'(x) = x + y(x)$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételhez tartozó megoldását.

Megoldás. A függvénysorozat 0. tagja $\varphi_0(x) = 1$, a továbbiakat a

$$\varphi_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x (\xi + \varphi_k(\xi)) d\xi$$

rekurzió határozza meg. Az első néhány függvény

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$\varphi_2(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}$$

$$\varphi_3(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

$$\varphi_4(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120},$$

ebből sejthetjük, hogy

$$\varphi_k(x) = -1 - x + 2 \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Valóban:

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^x (\xi + \varphi_k(\xi)) d\xi &= 1 + \int_0^x \left(-1 + 2 \sum_{i=0}^k \frac{\xi^i}{i!} + \frac{\xi^{k+1}}{(k+1)!} \right) d\xi \\ &= 1 - x + 2 \sum_{i=0}^k \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} + \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} \\ &= 1 - x + 2 \sum_{i=1}^{k+1} \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \varphi_{k+1}(x). \end{aligned}$$

A függvénysorozat mindenhol abszolút konvergens, határértéke

$$y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} -1 - x + 2 \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = -1 - x + 2e^x$$

Ez megoldja az egyenletet:

$$(-1 - x + 2e^x)' = -1 + 2e^x = x + (-1 - x + 2e^x).$$

8. Határozzuk meg a $(2x + 1)y' - 3y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2x + 1}$$

alakra hozható, ha $y \neq 0$ és $x \neq -\frac{1}{2}$ (ha y valahol 0, akkor mindenhol az az egyenlet alapján). Integráljuk mindkét oldalt felhasználva, hogy y és y_0 egyező előjelű:

$$\ln \frac{y}{y_0} = \int_{x_0}^x \frac{y'(\xi)}{y(\xi)} d\xi = \int_{x_0}^x \frac{3}{2\xi + 1} d\xi = \frac{3}{2} \ln \frac{1 + 2x}{1 + 2x_0}$$

azaz

$$y(x) = y_0 \left(\frac{1 + 2x}{1 + 2x_0} \right)^{3/2}$$

Az értelmezési tartomány $(-\infty, -\frac{1}{2})$ vagy $(-\frac{1}{2}, \infty)$. Látszólag két szabad paraméter van, de az előjelre ügyelve a nevezőt kihozhatjuk a zárójelből, és y_0 -val összevonhatjuk:

$$y(x) = C|1 + 2x|^{3/2},$$

ahol C bármilyen előjelű lehet.

9. Határozzuk meg az $(1 + x^2)y' + (1 + y^2) = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet szétválasztható:

$$\frac{y'}{1 + y^2} = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

Mivel nincsen megadva kezdeti feltétel, egyszerűbb határozatlan integrállal folytatni, ügyelve arra, hogy a két oldal egy-egy primitív függvénye konstansban eltérhet egymástól:

$$\arctan y(x) = C - \arctan x$$

tehát $y(x) = \tan(C - \arctan x)$. Egyszerűbb alakot kaphatunk

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

felhasználásával:

$$y(x) = \tan(C - \arctan x) = \frac{\tan C - x}{1 + (\tan C)x}$$

vagy $\tan C$ helyett C -t írva (ez is tetszőleges konstans!):

$$y(x) = \frac{C - x}{1 + Cx}.$$

10. Oldjuk meg az $y'' = -2xy'^2$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Vezessük be a $v = y'$ jelölést, erre a függvényre nézve az egyenlet elsőrendű: $v' = -2xv^2$, ami szétválasztható. A kezdeti feltétel $v(0) = y'(0) = 1$, tehát

$$\begin{aligned}\frac{v'}{v^2} &= -2x \\ \int_0^x \frac{v'(\xi)}{v(\xi)^2} d\xi &= \int_0^x (-2\xi) d\xi \\ -\frac{1}{v(x)} + \frac{1}{v(0)} &= -x^2 \\ v(x) &= \frac{v(0)}{1 + v(0)x^2} = \frac{1}{1 + x^2}.\end{aligned}$$

Integrálással kapjuk a megoldást:

$$y(x) = y(0) + \int_0^x v(\xi) d\xi = \int_0^x \frac{1}{1 + \xi^2} d\xi = \arctan x.$$

11. Oldjuk meg a $2xyy' = y^2 - x^2$ differenciálegyenletet $y(1) = 1$ kezdeti feltétellel.

Megoldás. A kezdeti feltétel környezetében $2xy \neq 0$, így eloszthatjuk vele az egyenletet:

$$y' = \frac{1}{2} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{x}{y},$$

a jobb oldal csak y/x -től függ, így $y = xu$ helyettesítést alkalmazhatunk. Ekkor $y' = u + xu'$, tehát

$$\begin{aligned}u' &= \frac{y' - u}{x} = \frac{y}{2x^2} - \frac{1}{2y} - \frac{u}{x} = \frac{1}{x} \left(\frac{u}{2} - \frac{1}{2u} - u \right) = \frac{-1}{2x} \left(u + \frac{1}{u} \right) \\ \frac{2uu'}{1 + u^2} &= -\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Mindkét oldalt integrálva $x > 0$ esetén

$$\ln \frac{x_0}{x} = - \int_{x_0}^x \frac{1}{\xi} d\xi = \int_{u(x_0)}^{u(x)} \frac{2u}{1 + u^2} du = \left[\ln(1 + u^2) \right]_{u(x_0)}^{u(x)} = \ln \frac{1 + u(x)^2}{1 + u(x_0)^2}$$

tehát a megoldás

$$y(x) = xu(x) = \sqrt{x_0 \left(1 + \frac{y_0^2}{x_0^2} \right) x - x^2} = \sqrt{2x - x^2}.$$

12. Oldjuk meg az $xy' = y - x \cos^2 \frac{y}{x}$ differenciálegyenletet.

Megoldás. $x \neq 0$ esetén az egyenlet

$$y' = \frac{y}{x} - \cos^2 \frac{y}{x},$$

ahol a jobb oldal csak y/x függvénye. $y = xu$ helyettesítéssel $y' = u + xu'$, tehát

$$\begin{aligned}u' &= \frac{y' - u}{x} = \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} \cos^2 \frac{y}{x} - \frac{u}{x} = -\frac{1}{x} \cos^2 u \\ \frac{u'}{\cos^2 u} &= -\frac{1}{x} \\ \tan u(x) &= -\ln x + C \\ y(x) &= x \arctan (C - \ln x).\end{aligned}$$