Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

8. feladatsor: Kezdeti feltételtől való függés, egzakt differenciálegyenletek (megoldás)

---

1. Keressük meg az $y' = \sin y$ differenciálegyenlet konstans megoldásait, és határozzuk meg ezek kezdeti feltétel szerinti deriváltjait, ha a kezdeti feltétel az $x_0 = 0$ pontban van megadva.

   Megoldás. Ha $y(x) = y_0$ konstans megoldás, akkor $y'(x) = 0$, tehát $\sin y_0 = 0$. Ez $y_0 = k\pi$ esetén teljesül ($k \in \mathbb{Z}$). Rögzítsünk egy k egész számot, és jelölje $Y(x, 0, y_0)$ az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feletételt kielégítő megoldást, ennek y_0 szerinti deriváltja az $(x, 0, k\pi)$ pontban legyen $D(x)$. A tanult tétel szerint Y és D differenciálható, a láncszabály alapján

$$\begin{aligned} D'(x) &= \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial}{\partial x}Y(x,0,y_0)\bigg|_{y_0=k\pi} \\ &= \frac{\partial}{\partial y_0}\sin Y(x,0,y_0)\bigg|_{y_0=k\pi} \\ &= \cos Y(x,0,k\pi)D(x) \\ &= (-1)^k D(x). \end{aligned}$$

   A kapott differenciálegyenlet szétválasztható:

$$\frac{D'(x)}{D(x)} = (-1)^k,$$

   a két oldalt integrálva $D(0) = 1$ figyelembevételével $\ln D(x) = (-1)^k x$, vagyis

$$D(x) = e^{(-1)^k x}$$

   adódik.

2. Tekintsük az

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\sin y_1 \end{aligned}$$

   differenciálegyenlet-rendszer $y_1(0) = y_2(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását. Határozzuk meg a megoldás deriváltját a kezdeti feltétel szerint ebben a pontban.

   Megoldás. Az $y_1(x) = y_2(x) = 0$ konstans függvény a kezdetiérték-probléma egyetlen megoldása. Jelölje $\mathbf{Y}(x, 0, \mathbf{y}_0) = (Y_1(x, 0, \mathbf{y}_0), Y_2(x, 0, \mathbf{y}_0))$ a megoldást $(y_1(0), y_2(0)) = \mathbf{y}_0 = (y_{0,1}, y_{0,2})$ kezdeti feltétel mellett. Legyen $D_{ij}(x) = \frac{\partial Y_i(x,0,\mathbf{y}_0)}{\partial y_{0,j}}$. A tanult tétel alapján D_{ij} és $\mathbf{Y}$ differenciálható. $f_1(x, \mathbf{y}) = y_2$, $f_2(x, \mathbf{y}) = -\sin y_1$ jelöléssel a derivált

$$\begin{aligned} D_{ij}'(x) &= \frac{\partial}{\partial y_{0,j}}\frac{\partial}{\partial x}Y_i(x,0,\mathbf{y}_0)\bigg|_{\mathbf{y}_0=0} = \frac{\partial}{\partial y_{0,j}}f_i(x,0,Y_i(x,0,\mathbf{y}_0))\bigg|_{\mathbf{y}_0=0} \\ D_{11}'(x) &= D_{21}(x) \\ D_{12}'(x) &= D_{22}(x) \\ D_{21}'(x) &= -D_{11}(x) \\ D_{22}'(x) &= -D_{12}(x). \end{aligned}$$

Ez két független differenciálegyenlet-rendszer, a kezdeti feltétel $D(0) = I$ (egységmátrix). Később látni fogjuk, hogy hogyan lehet az egyenletrendszert megoldani, de azt most is észrevehetjük, hogy

$$D(x) = \begin{bmatrix} D_{11}(x) & D_{12}(x) \\ D_{21}(x) & D_{22}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

megoldás (azt tudjuk, hogy csak egy megoldás létezik).

3. Oldjuk meg a $2x + \cos y - (x \sin y)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(1) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás.

   $$\frac{\partial(2x + \cos y)}{\partial y} = -\sin y = \frac{\partial(-x \sin y)}{\partial x}$$

   miatt az egyenlet egzakt, a potenciál

   $$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x (2\xi + \cos 0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (-x \sin \eta)\,\mathrm{d}\eta \\ &= x + x^2 - x + x \cos y = x^2 + x \cos y. \end{aligned}$$

   A kezdeti feltétel alapján $u(x_0, y_0) = u(1, 0) = 2$, tehát a megoldás implicit alakban $x^2 + x \cos y(x) = 2$.
   Észrevehetjük, hogy ez az implicit egyenlet olyan görbét határoz meg a síkon, ami nem egy függvény grafikonja, hiszen ha egy (x, y) pár rajta van a görbén, akkor $(x, \pm y + 2k\pi)$ is. Ilyenkor általában az történik, hogy a kezdeti feltételtől elindulva a görbe egy darabja még függvény, de amint az érintő függőlegessé válik, már nem biztos, hogy folytatódik a megoldás. Mindenesetre ha az (x_0, y_0) pontban nem függőleges az érintő, akkor annak egy környezetében egyértelmű a megoldás.
   A feladatbeli kezdeti feltétel viszont éppen a kivételes eset, hiszen az egyenletbe helyettesítve $2 + 1 - 0y'(1) = 0$ adódik, aminek nincsen megoldása. Az implicit alakból $y(x)$-et kifejezve két olyan függvényt találunk, ami megoldja az egyenletet egy nyílt intervallumon, aminek egyik végpontja 1, oda folytonosan kiterjed, és kielégíti a kezdeti feltételt:

   $$y(x) = \pm \arccos\left(\frac{2}{x} - x\right).$$

4. Egyváltozós multiplikátorral tegyük egzakttá az $x^3 + y^4 + 8xy^3y' = 0$ differenciálegyenletet, majd oldjuk meg.

   Megoldás. Létezik csak x-től függő multiplikátor:

   $$\ln|M(x)| = \int \frac{\frac{\partial(x^3+y^4)}{\partial y} - \frac{\partial(8xy^3)}{\partial x}}{8xy^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|x| + C$$

   alapján $M(x) = |x|^{-1/2}$, tehát $|x|^{-1/2}(x^3 + y^4) + 8|x|^{-1/2}xy^3y' = 0$ egzakt. A potenciál

   $$u(x, y) = \int_0^x |\xi|^{-1/2}(\xi^3 + 0^4)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y 8|x|^{-1/2}x\eta^3\,\mathrm{d}\eta = \frac{2}{7}x^4|x|^{-1/2} + 2xy^4|x|^{-1/2}.$$

   Az általános megoldás $u(x, y) = C$, amiből

   $$y(x) = \sqrt[4]{C\frac{\sqrt{|x|}}{2x} - \frac{x^3}{7}}.$$

5. Egyváltozós multiplikátorral tegyük egzakttá az $y \ln y + y \sinh x + (x + ye^y)y' = 0$ differenciálegyenletet, majd oldjuk meg.

Megoldás. Létezik csak y-tól függő multiplikátor:

$$\ln |M(y)| = \int \frac{\frac{\partial(x+ye^y)}{\partial x} - \frac{\partial(y \ln y + y \sinh x)}{\partial y}}{y \ln y + y \sinh x} \,\mathrm{d}y = \int \frac{-1}{y} \,\mathrm{d}y = -\ln y + C$$

alapján $M(y) = 1/y$, tehát $\ln y + \sinh x + \left(\frac{x}{y} + e^y\right) y' = 0$ egzakt. A potenciál kereséséhez legyen a kezdőpont $(0, 1)$, mert az origóban nem értelmes egyik komponens sem. Ekkor

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x (\ln 1 + \sinh \xi) \,\mathrm{d}\xi + \int_1^y \left(\frac{x}{\eta} + e^\eta\right) \mathrm{d}\eta \\ &= \cosh x - 1 + x \ln y + e^y - e. \end{aligned}$$

Az általános megoldás implicit alakban $u(x, y(x)) = C$, ebből $y(x)$-t nem lehet elemi függvénnyel kifejezni.

További gyakorló feladatok

6. Határozzuk meg az $y' = \sin(xy)$, $y(0) = 0$ kezdetiérték-probléma megoldásának kezdeti feltétel szerinti deriváltját.

Megoldás. A konstans 0 függvény megoldja a kezdetiérték-problémát és a Picard-Lindelöf-tétel miatt ez az egyetlen megoldás. Legyen $Y(x, 0, y_0)$ az $y(0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás, $D(x)$ ennek y_0 szerinti deriváltja az $y_0 = 0$ pontban. Ez a következő differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$\begin{aligned} D'(x) &= \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{\partial}{\partial x} Y(x, 0, y_0)\bigg|_{y_0=0} = \frac{\partial}{\partial y_0} \sin(xY(x, 0, y_0))\bigg|_{y_0=0} \\ &= \cos(xY(x, 0, 0))xD(x) = xD(x). \end{aligned}$$

Az kapott differenciálegyenlet szétválasztható:

$$\frac{D'(x)}{D(x)} = x,$$

a két oldalt integrálva $D(0) = 1$ figyelembevételével $\ln D(x) = x^2/2$, vagyis

$$D(x) = e^{x^2/2}.$$

7. Tekintsük az

$$\begin{aligned} y_1' &= xe^{-y_1} y_2 \\ y_2' &= 1 - e^{y_2} \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszer $y_1(0) = y_2(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását. Határozzuk meg a megoldás deriváltját a kezdeti feltétel szerint ebben a pontban.

Megoldás. Ha $y_1 = y_2 = 0$, akkor a jobb oldal 0 x értékétől függetlenül, tehát a konstans $y_1(x) = y_2(x) = 0$ megoldja a kezdetiérték-problémát. Legyen $\mathbf{Y}(x, 0, \mathbf{y}_0)$ az $(y_1(0), y_2(0)) = \mathbf{y}_0 = (y_{0,1}, y_{0,2})$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás és $D_{ij}(x)$ az i. komponens $y_{0,j}$ szerinti deriváltja. Ez kielégíti a

$$D_{ij}'(x) = \frac{\partial}{\partial y_{0,j}} \frac{\partial}{\partial x} Y_i(x, 0, \mathbf{y}_0)\bigg|_{\mathbf{y}_0=0} = \frac{\partial}{\partial y_{0,j}} f_i(x, 0, Y_i(x, 0, \mathbf{y}_0))\bigg|_{\mathbf{y}_0=0}$$

egyenletrendszert, ahol $f_1(x,\mathbf{y}) = xe^{-y_1}y_2$ és $f_2(x,\mathbf{y}) = 1 - e^{y_2}$. A láncszabály alapján kifejtve az egyenletrendszer

$$\begin{aligned}
D'_{11}(x) &= xD_{21}(x)\\
D'_{12}(x) &= xD_{22}(x)\\
D'_{21}(x) &= -D_{21}(x)\\
D'_{22}(x) &= -D_{22}(x).
\end{aligned}$$

A kezdeti feltétel $D_{ij}(x) = \delta_{ij}$ (Kronecker-delta, azaz $D(0) = I$ az egységmátrix), ezzel az utolsó két egyenlet megoldható (mindkettő szétválasztható): $D_{21}(x) = 0$ és $D_{22}(x) = e^{-x}$. Az első egyenlet ennek alapján $D'_{11}(x) = 0$, tehát $D_{11}(x) = 1$ konstans. Végül a második egyenlet $D'_{12}(x) = xe^{-x}$, amiből integrálással $D_{12}(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}$. Tehát a deriváltmátrix

$$D(x) = \begin{bmatrix} D_{11}(x) & D_{12}(x) \\ D_{21}(x) & D_{22}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-x} - xe^{-x} \\ 0 & e^{-x} \end{bmatrix}.$$

8. Határozzuk meg az $y \cosh x + (\sinh x - 2y)y' = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet egzakt, mivel

   $$\frac{\partial(y\cosh x)}{\partial y} = \cosh x = \frac{\partial(\sinh x - 2y)}{\partial x}.$$

   Egy potenciál

   $$u(x,y) = \int_0^x 0 \cdot \cosh\xi \,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (\sinh x - 2\eta)\,\mathrm{d}\eta = y\sinh x - y^2.$$

   A kezdeti feltételt behelyettesítve $u(x_0, y_0) = u(0,1) = -1$, tehát

   $$y(x) = \frac{1}{2}\left(\sinh x + \sqrt{4 + \sinh^2 x}\right).$$

   (A másodfokú egyenlet megoldásából $\ldots \pm \sqrt{\ldots}$ adódik, a megfelelő előjelet a kezdeti feltétel határozza meg.)

9. Oldjuk meg az $y\cosh x + (\sinh x - 2y)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = -1$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. A differenciálegyenlet egzakt, mivel

   $$\frac{\partial}{\partial y} y\cosh x = \cosh x = \frac{\partial}{\partial x}\sinh x$$

   A megoldás $u(x, y(x)) = C$ alakban írható, ahol $\operatorname{grad} u(x,y) = y\cos x\mathbf{i} + (\sinh x - 2y)\mathbf{j}$ és $u(x_0, y(x_0)) = u(0,-1) = C$. Egy lehetséges választás $u(x,y) = y\sinh x - y^2$, amiből $C = -1$ és így

   $$y(x) = \frac{1}{2}\sinh x - \frac{1}{2}\sqrt{4 + \sinh^2 x}.$$

   (A másodfokú egyenlet megoldásából $\ldots \pm \sqrt{\ldots}$ adódik, a megfelelő előjelet a kezdeti feltétel határozza meg.)

10. Határozzuk meg az $\frac{x+y}{y} + \frac{2x+3y^2}{2y}y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Létezik csak y-tól függő multiplikátor:

$$\ln|M(y)| = \int \frac{\frac{\partial \frac{2x+3y^2}{2y}}{\partial x} - \frac{\partial(\frac{x+y}{y})}{\partial y}}{\frac{x+y}{y}} \,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y = \ln y + C,$$

tehát $M(y) = y$, és így $x + y + (x + \frac{3}{2}y^2)y'$ egzakt. Egy potenciál

$$u(x,y) = \int_0^x (\xi + 0) \,\mathrm{d}\xi + \int_0^y \left(x + \frac{3}{2}\eta^2\right) \mathrm{d}\eta = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^3}{2}.$$

Az általános megoldás implicit alakban $u(x, y(x)) = C$, ahol C paraméter.

11. Oldjuk meg az $y + (ye^x - 1)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 3$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Létezik csak x-től függő multiplikátor:

$$\ln|M(x)| = \int \frac{\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial(ye^x - 1)}{\partial x}}{ye^x - 1} \,\mathrm{d}x = \int (-1) \,\mathrm{d}x = -x,$$

tehát $M(x) = e^{-x}$ és $ye^{-x} + (y - e^{-x})y' = 0$ egzakt. Egy potenciál

$$u(x,y) = \int_0^x 0 \cdot e^{-\xi} \,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (\eta - e^{-x}) \,\mathrm{d}\eta = \frac{y^2}{2} - ye^{-x}.$$

A kezdeti feltétel alapján a megoldás implicit alakja $u(x, y(x)) = u(x_0, y_0) = \frac{3}{2}$. Az explicit alakot is meg lehet határozni:

$$y(x) = e^{-x} + e^{-x}\sqrt{1 + 3e^{2x}}.$$