Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 tavasz

9. feladatsor: Állandók variálása, megoldás sorfejtéssel (megoldás)

---

1. Határozzuk meg az $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg, ami szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = -2x.$$

   A két oldal integrálása után $\ln|y(x)| = -x^2 + C$, vagy átrendezve és $\pm e^C$ helyett C-t írva $y(x) = Ce^{-x^2}$ adódik.
   Az inhomogén egyenlet megoldását az állandók variálásának módszere szerint $y(x) = c(x)e^{-x^2}$ alakban keressük. Az egyenlet bal oldalába helyettesítjük:

$$\begin{aligned} y'(x) + 2xy(x) &= c'(x)e^{-x^2} - c(x)2xe^{-x^2} + 2xc(x)e^{-x^2} \\ &= c'(x)e^{-x^2}. \end{aligned}$$

   A kapott kifejezésnek a jobb oldallal kell megegyeznie, tehát $c'(x) = 2x$, vagyis $c(x) = x^2 + C$, ahol C tetszőleges konstans. Az egyenlet általános megoldása tehát $y(x) = x^2e^{-x^2} + Ce^{-x^2}$.

2. Határozzuk meg az

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 2e^{-2x} \\ -e^{2x} & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} -6e^{-2x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

   differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását, ha a hozzá tartozó homogén rendszernek $\mathbf{y}_1(x) = (e^x, e^{3x})$ és $\mathbf{y}_2(x) = (2, e^{2x})$ megoldásai.

   Megoldás. A két függvény lineárisan független, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $\mathbf{y}(x) = C_1\mathbf{y}_1(x) + C_2\mathbf{y}_2(x)$. Legyen $U(x)$ az a mátrix, aminek oszlopai az $\mathbf{y}_1(x)$ és $\mathbf{y}_2(x)$ vektorok, $A(x)$ pedig az $\mathbf{y}$ előtt álló együtthatómátrix. Az állandók variálásának módszere szerint az inhomogén egyenlet megoldását $\mathbf{y}(x) = U(x)\mathbf{c}(x)$ alakban keressük. $U'(x) = A(x)U(x)$ alapján a derivált

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(x) &= U'(x)\mathbf{c}(x) + U(x)\mathbf{c}'(x) \\ &= A(x)U(x)\mathbf{c}(x) + U(x)\mathbf{c}'(x) \\ &= A(x)\mathbf{y}(x) + U(x)\mathbf{c}'(x), \end{aligned}$$

   tehát $\mathbf{y}(x)$ akkor oldja meg az egyenletet, ha

$$\mathbf{c}'(x) = U(x)^{-1} \begin{bmatrix} -6e^{-2x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

   teljesül. Számítsuk ki $U(x)$ inverzét:

$$U(x)^{-1} = \begin{bmatrix} e^x & 2 \\ e^{3x} & e^{2x} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{e^x \cdot e^{2x} - 2e^{3x}} \begin{bmatrix} e^{2x} & -2 \\ -e^{3x} & e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-x} & 2e^{-3x} \\ 1 & -e^{-2x} \end{bmatrix},$$

ezzel

$$\mathbf{c}'(x) = \begin{bmatrix} -e^{-x} & 2e^{-3x} \\ 1 & -e^{-2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6e^{-2x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6e^{-3x} \\ -6e^{-2x} \end{bmatrix}.$$

Integráljuk a kapott vektort (komponensenként), majd szorozzuk meg az $U(x)$ mátrixszal:

$$U(x) \cdot \mathbf{c}(x) = \begin{bmatrix} e^{x} & 2 \\ e^{3x} & e^{2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2e^{-3x} + C_1 \\ 3e^{-2x} + C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{-2x} \\ 1 \end{bmatrix} + U(x) \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása $\mathbf{y}(x) = (4e^{-2x}, 1) + C_1\mathbf{y}_1(x) + C_2\mathbf{y}_2(x)$.

3. Határozzuk meg az

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{1+x^2} \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását.

Megoldás. Először a homogén egyenletrendszert oldjuk meg. Írjuk fel az komponensenként:

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{1+x^2} y_1 \\ y_2' &= y_1 + \frac{1}{1+x^2} y_2. \end{aligned}$$

Ebben az alakban láthatjuk, hogy az első egyenlet nem tartalmazza y_2-t, így abból y_1 elvileg meghatározható. Ez elsőrendű homogén lineáris, tehát szétválasztható:

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{1}{1+x^2},$$

aminek a megoldása $y_1(x) = Ce^{\arctan x}$.

Most a második egyenletbe írjuk be a kapott függvényt (pl. $C = 1$ választással), ami így elsőrendű inhomogén lineáris lesz. A homogén rész megegyezik az imént megoldott egyenlettel, tehát az inhomogén egyenlet megoldását $y_2(x) = c(x)e^{\arctan x}$ alakban kereshetjük. Behelyettesítve a következő egyenlet adódik:

$$c'(x)e^{\arctan x} + c(x)\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} = e^{\arctan x} + \frac{1}{1+x^2}c(x)e^{\arctan x},$$

amiből $c'(x) = 1$, azaz $c(x) = x + C$. Az eddigiek alapján felírhatjuk a homogén egyenlet általános megoldását:

$$\mathbf{y}_h(x) = C_1 \begin{bmatrix} e^{\arctan x} \\ xe^{\arctan x} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\arctan x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\arctan x} & 0 \\ xe^{\arctan x} & e^{\arctan x} \end{bmatrix}}_{U(x)} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}.$$

Az állandók variálásának módszere alapján az inhomogén egyenlet megoldása $U(x)\mathbf{c}(x)$, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(x) &= U(x)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^2} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= e^{-\arctan x} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^2} \\ 1 \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{-\arctan x}}{1+x^2} \\ e^{-\arctan x} - \frac{xe^{-\arctan x}}{1+x^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

amiből $\mathbf{c}$ integrálással meghatározható. Ezt kell megszorozni az $U(x)$ mátrixszal:

$$U(x)\mathbf{c}(x) = \begin{bmatrix} e^{\arctan x} & 0 \\ xe^{\arctan x} & e^{\arctan x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -e^{-\arctan x} \\ xe^{-\arctan x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az inhomogén egyenletrendszer általános megoldása tehát

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} e^{\arctan x} \\ xe^{\arctan x} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\arctan x} \end{bmatrix}$$

.

4. Határozzuk meg az $xy'' - (x+1)y' + y = x^2e^x$ differenciálegyenlet általános megoldását, ha tudjuk, hogy $y_1(x) = e^x$ és $y_2(x) = x + 1$ megoldja a hozzá tartozó homogén egyenletet.

   Megoldás. Az egyenlet másodrendű lineáris, az $\mathbf{y} = (y, y')$ változó bevezetésével átalakíthatjuk elsőrendű egyenletrendszerré, és alkalmazhatjuk az állandók variálásának módszerét:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{x} & \frac{x+1}{x} \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ xe^x \end{bmatrix}.$$

   e^x és $x + 1$ lineárisan függetlenek, tehát a homogén egyenletrendszer általános megoldását

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e^x & x+1 \\ e^x & 1 \end{bmatrix}}_{U(x)} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

   alakban írhatjuk fel. Az állandók variálásának módszere alapján az inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)(x + 1)$, ahol

$$\begin{aligned} e^x c_1'(x) + (x+1)c_2'(x) &= 0 \\ e^x c_1'(x) + c_2'(x) &= xe^x, \end{aligned}$$

   amiből $c_1'(x) = 1 + x$ és $c_2'(x) = -e^x$. Integrálással kapjuk, hogy $c_1(x) = C_1 + x + \frac{x^2}{2}$ és $c_2(x) = C_2 - e^x$. Tehát

$$y(x) = (C_1 + x + \frac{x^2}{2})e^x + (x+1)(C_2 - e^x).$$

5. Oldjuk meg sorfejtéssel az $y' = x + y$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. A megoldást

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

   alakban keressük, ennek deriváltja

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

   Behelyettesítve az egyenlet

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + x$$

alakú lesz, amiből az együtthatók összehasonlításával

$$a_{k+1} = \begin{cases} \frac{a_k}{k+1} & \text{ha } k \neq 1 \\ \frac{a_1+1}{2} & \text{ha } k = 1 \end{cases}$$

adódik. A kezdeti feltétel $0 = y(0) = a_0$, tehát

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \leq 1 \\ \frac{1}{k!} & \text{egyébként} \end{cases}$$

A sor minden x-re abszolút konvergens, összegfüggvénye $y(x) = e^x - 1 - x$, ami valóban megoldás.

További gyakorló feladatok

6. Határozzuk meg az $y' - (\tan x + \operatorname{ctg} x)y = -4\sin^2 x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű lineáris inhomogén, először a homogén egyenletet oldjuk meg. Ez szétválasztható:

   $$\frac{y'}{y} = \tan x + \operatorname{ctg} x.$$

   Integráljuk mindkét oldalt, ebből a homogén egyenlet általános megoldása

   $$\ln|y_h(x)| = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) \mathrm{d}x = -\ln\cos x + \ln\sin x + C = \ln\tan x + C,$$

   vagyis $y_h(x) = C\tan x$.
   Az inhomogén egyenlet megoldható az állandók variálásával. $y(x) = c(x)y_h(x)$, ahol

   $$c'(x) = \frac{-4\sin^2 x}{\tan x} = -4\sin x\cos x = -2\sin 2x.$$

   Ennek az integrálja $c(x) = \cos 2x + C$, tehát az eredeti egyenlet általános megoldása $y(x) = \cos 2x\tan x + C\tan x$.

7. Oldjuk meg az $xy' - y = x^3 + 1$ differenciálegyenletet $y(2) = 5$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű lineáris inhomogén, a hozzá tartozó homogén egyenlet szétválasztható:

   $$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x},$$

   integrálás után az $y_h(x) = Cx$ általános megoldást kapjuk.
   Az inhomogén egyenlet megoldását az állandók variálásának módszerével keressük. $y(x) = c(x)x$, a kezdeti feltételből $c(2) = \frac{5}{2}$, az egyenletből pedig $c'(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$, tehát

   $$c(x) = \frac{5}{2} + \int_2^x \frac{\xi^3+1}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}.$$

   A kezdetiérték-probléma megoldása $y(x) = -1 + x + \frac{x^3}{2}$.

8. Határozzuk meg az $y' + y = e^{-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet elsőrendű lineáris inhomogén, a hozzá tartozó homogén egyenlet $y' + y = 0$, ennek megoldása

$$\ln|y(x)| = \int (-1)\,\mathrm{d}x = -x + C,$$

azaz $y_h(x) = Ce^{-x}$. Az állandók variálásának módszere alapján az inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = c(x)e^{-x}$, ahol

$$c'(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = 1,$$

tehát $c(x) = x + C$. Az általános megoldás $y(x) = xe^{-x} + Ce^{-x}$.

9. Oldjuk meg az $y' + y\cos x = \sin x \cos x$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű lineáris inhomogén, a homogén egyenlet átrendezve

$$\frac{y'}{y} = -\cos x.$$

Ebből a homogén egyenlet általános megoldása $Ce^{-\sin x}$. Az inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = c(x)e^{-\sin x}$ alakba írható, ahol $c(0) = 1$ és

$$c'(x) = \frac{\sin x \cos x}{e^{-\sin x}},$$

tehát ($t = \sin x$ helyettesítéssel, majd parciális integrálással)

$$\begin{aligned} c(x) &= 1 + \int_0^x e^{\sin\xi} \sin\xi \cos\xi \,\mathrm{d}\xi \\ &= 1 + \int_0^{\sin x} te^t \,\mathrm{d}t \\ &= 1 + [ue^u - e^u]_{u=0}^{u=\sin x} \\ &= 2 + e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x}. \end{aligned}$$

A kezdetiérték-probléma megoldása tehát $y(x) = -1 + 2e^{-\sin x} + \sin x$.

10. Határozzuk meg az

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} x & 1-x^2 \\ 1 & -x \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását, ha a hozzá tartozó homogén rendszernek $\mathbf{y}_1(x) = (1 + x^2, x)$ és $\mathbf{y}_2(x) = (x, 1)$ megoldásai.

Megoldás. A megadott függvények lineárisan függetlenek, legyen

$$U(x) = \begin{bmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1 \end{bmatrix}$$

a belőlük képzett mátrix. Az állandók variálásának módszere szerint az általános megoldás $\mathbf{y}(x) = U(x)\mathbf{c}(x)$, ahol a $\mathbf{c}(x)$ függvényre

$$\mathbf{c}'(x) = U(x)^{-1} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x \\ -x & 1+x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

teljesül. Ennek primitív függvénye $c(x) = (C_1, x + C_2)$, tehát az általános megoldás

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ x + C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ x \end{bmatrix} + C_1\mathbf{y}_1(x) + C_2\mathbf{y}_2(x).$$

11. Oldjuk meg az

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} \frac{x}{1+x^2} & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{x}{1+x^2} \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^2} \\ -\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet-rendszert $\mathbf{y}(0) = (0, 1)$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlethez tartozó homogén egyenlet komponensenként felírva

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{x}{1+x^2} y_1 \\ y_2' &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} y_1 + \frac{x}{1+x^2} y_2, \end{aligned}$$

az első egyenletben nincsen y_2, tehát abból y_1 meghatározható:

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{x}{1+x^2}$$

mindkét oldalát integrálva $\ln|y_1(x)| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$, azaz $y_1(x) = C\sqrt{1+x^2}$. $C = 1$ választással írjuk be a második egyenletbe, ekkor az

$$y_2' = x + \frac{x}{1+x^2} y_2$$

inhomogén egyenlethez jutunk, a hozzá tartozó homogén egyenlet megegyezik az előző-vel, tehát megoldása $C\sqrt{1+x^2}$. Az inhomogén egyenlet megoldását $y_2(x) = c(x)\sqrt{1+x^2}$ alakban írjuk fel, ahol

$$c'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

tehát $c(x) = \sqrt{1+x^2} + C$ és így $y_2(x) = 1 + x^2 + C\sqrt{1+x^2}$. Az eddigiek alapján felírható a homogén egyenletrendszer általános megoldása:

$$\mathbf{y}_h(x) = C_1 \begin{bmatrix} \sqrt{1+x^2} \\ 1+x^2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{1+x^2} \end{bmatrix} = U(x) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}.$$

Az inhomogén egyenletet az állandók variálásával oldjuk meg: $\mathbf{y}(x) = U(x)c(x)$, ahol

$$\mathbf{c}'(x) = U(x)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^2} \\ -\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & 0 \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^2} \\ -\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Az első komponens integrálásához $x = \sinh t$, $\mathrm{d}x = \cosh t\,\mathrm{d}t$ helyettesítést alkalmazunk:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cosh^3 t} \cosh t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cosh^2 t}\,\mathrm{d}t = \tanh t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C_1.$$

A második komponens primitív függvénye $-x + C_2$. Az inhomogén egyenlet általános megoldását az $U(x)$ mátrixszal szorzás adja:

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} \sqrt{1+x^2} \\ 1+x^2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{1+x^2} \end{bmatrix},$$

a kezdeti feltételből $C_1 = 0$ és $C_2 = 1$.

12. Határozzuk meg az $y'' - y = \frac{2}{x} - 2x\ln x$ differenciálegyenlet általános megoldását ($x > 0$), ha tudjuk, hogy $y_1(x) = e^x$ és $y_2(x) = e^{-x}$ megoldja a hozzá tartozó homogén egyenletet.

Megoldás. Az egyenlet másodrendű lineáris, amit elsőrendű rendszerré alakíthatunk $\mathbf{y} = (y, y')$ bevezetésével:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{x} - 2x \ln x \end{bmatrix}.$$

Legyen

$$U(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{bmatrix}$$

a megadott megoldásokból álló mátrix (nem szinguláris), ekkor $U(x)\mathbf{C}$ a homogén rendszer általános megoldása. Alkalmazzuk az állandók variálásának módszerét, az inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$, ahol

$$\begin{aligned} e^x c_1'(x) + e^{-x} c_2'(x) &= 0 \\ e^x c_1'(x) - e^{-x} c_2'(x) &= \frac{2}{x} - 2x \ln x. \end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x} x \ln x \\ c_2'(x) &= -\frac{e^x}{x} + e^x x \ln x. \end{aligned}$$

A primitív függvény mindkét esetben a második tag parciális integrálásával kapható meg, például.

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int \left(\frac{e^{-x}}{x} - e^{-x} x \ln x \right) \mathrm{d}x \\ &= e^{-x}(1+x) \ln x + \int \left(\frac{e^{-x}}{x} - e^{-x}(1+x)\frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x \\ &= e^{-x}(1+x) \ln x + \int (-e^{-x}) \, \mathrm{d}x = e^{-x}(1+x) \ln x + e^{-x} + C_1, \end{aligned}$$

hasonlóan

$$c_2(x) = e^x(x-1) \ln x - e^x + C_2.$$

Az egyenlet általános megoldása tehát $y(x) = 2x \ln x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

13. Oldjuk meg az $xy''' + 2y'' = \frac{1}{x}$ differenciálegyenletet $y(1) = 1$, $y'(1) = y''(1) = 0$ kezdeti feltétellel.

Megoldás. A homogén egyenlet $y'' = u$-ra nézve elsőrendű: $xu' + 2u = 0$, ami szétválasztható:

$$\frac{u'}{u} = -\frac{2}{x}$$

alapján $u(x) = \frac{C_1}{x^2}$. Ezt kétszer integrálva kapjuk a harmadrendű homogén egyenlet általános megoldását: $y_h(x) = -C_1 \ln x + C_2 x + C_3$.
Az eredeti egyenletet átírhatjuk elsőrendű egyenletrendszerré az $\mathbf{y} = (y, y', y'')$ vektorértékű függvény bevezetésével. A kapott

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{x} \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{x^2} \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer általános megoldása az előbbiek alapján (a korábbi C_1 helyett $-C_1$-et írva)

$$\begin{bmatrix} \ln x & x & 1 \\ \frac{1}{x} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}.$$

Az állandók variálásának módszere szerint az inhomogén egyenlet megoldása

$$y(x) = c_1(x)(\ln x) + c_2(x)x + c_3(x),$$

ahol az együtthatófüggvényekre az

$$\begin{aligned} (\ln x)c_1'(x) + xc_2'(x) + c_3'(x) &= 0 \\ \frac{1}{x}c_1'(x) + c_2'(x) &= 0 \\ \frac{-1}{x^2}c_1'(x) &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

egyenletrendszer teljesül. Ebből $c_1'(x) = -1$, $c_2'(x) = \frac{1}{x}$ és $c_3'(x) = \ln x - 1$ következik, tehát $c_1(x) = C_1 - x$, $c_2(x) = C_2 + \ln x$ és $c_3(x) = C_3 - 2x + x\ln x$.
Az általános megoldás és deriváltajai eszerint

$$\begin{aligned} y(x) &= (C_1 - x)\ln x + (C_2 + \ln x)x + (C_3 - 2x + x\ln x) \\ &= x\ln x + C_1 \ln x + C_2 x + C_3 - 2x \\ y'(x) &= \ln x - 1 + \frac{C_1}{x} + C_2 \\ y''(x) &= \frac{1}{x} - \frac{C_1}{x^2}. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételből $1 = y(1) = C_2 + C_3 - 2$, $0 = -1 + C_1 + C_2 = 1 - C_1$, tehát $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ és $C_3 = 3$. A kezdetiérték-probléma megoldása

$$y(x) = 3 - 2x + \ln x + x\ln x.$$

14. Sorfejtés segítségével határozzuk meg az $(1-x)y'' + xy' - y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = y'(0) = 1$ feltételt kielégítő megoldását.
Megoldás. A megoldást

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

alakban keressük, ennek deriváltjai

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\ y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}. \end{aligned}$$

Ezeket az egyenletbe helyettesítjük:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + x\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k a_{k+1}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= 2a_2 - a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big((k+2)(k+1)a_{k+2} - (k+1)k a_{k+1} + (k-1)a_k\Big)x^k. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételből $1 = y(0) = a_0$ és $1 = y'(0) = a_1$, az sorfejtés első tagjából $0 = 2a_2 - a_0$, azaz $a_2 = \frac{1}{2}$, a többi tagból pedig $k \geq 1$ esetén a

$$a_{k+2} = \frac{(k+1)ka_{k+1} - (k-1)a_k}{(k+1)(k+2)}$$

rekurziót kapjuk. Ebből az első néhány tagot meghatározva sejthetjük, hogy $a_k = \frac{1}{k!}$, behelyettesítve ellenőrizzük:

$$a_{k+2} = \frac{(k+1)k\frac{1}{(k+1)!} - (k-1)\frac{1}{k!}}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k-(k-1))\frac{1}{k!}}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(k+2)!}$$

A kapott hatványsor minden x-re abszolút konvergens, összege $y(x) = e^x$, ami megoldja a kezdetiérték-problémát.

15. Sorfejtés segítségével határozzuk meg az $y'' - xy' + 4y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 3, y'(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

Megoldás. A megoldást

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

alakban keressük, ennek deriváltjai

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}$$
$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}.$$

Helyettesítsük be az egyenletbe:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - x\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1} + 4\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^k + 4\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= 2a_2 + 4a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big((k+2)(k+1)a_{k+2} - ka_k + 4a_k\Big)x^k. \end{aligned}$$

A jobb oldalon álló hatványsor akkor azonosan 0, ha minden együttható 0, ebből a következő rekurziót kapjuk:

$$a_{k+2} = \begin{cases} \frac{k-4}{(k+2)(k+1)}a_k & \text{ha } k \geq 1 \\ -2a_0 & \text{ha } k = 0. \end{cases}$$

A kezdeti feltétel alapján $a_0 = y(0) = 3$ és $a_1 = y'(0) = 0$, innen a rekurzió alapján meghatározható a többi együttható. $a_1 = 0$ miatt az összes páratlan sorszámú is 0 lesz. Másrészt $k = 4$ esetben a rekurzióból $a_6 = 0$ következik, és emiatt $a_k = 0$ minden $k \geq 6$ páros számra is. Következésképp a hatványsor valójában egy legfejlebb negyedfokú polinom. Az együtthatók $a_2 = -2\cdot 3 = -6$ és $a_4 = \frac{-2}{4\cdot 3}\cdot(-6) = 1$. A kezdetiérték-probléma megoldása $y(x) = x^4 - 6x^2 + 3$.

Megjegyzés. Az $y'' - xy' + \lambda y = 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ paraméter) differenciálegyenlet neve Hermite-differenciálegyenlet. Ha $\lambda \in \mathbb{N}$, akkor létezik λ fokú polinom megoldás, egyébként pedig minden megoldás exponenciálisan nő.