Feladatok az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
3. hét

1. Vizsgálja meg monotonitás és korlátosság szempontjából az alábbi sorozatokat:

   a) $a_n = \frac{3n-2}{2n+3}$ b)[hf] $b_n = \frac{n-4}{n+3}$ c) $c_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$ d)[hf] $d_n = n^2 - 3n + 2$

2. Határozzuk meg a határértékeket, és keressünk n_ε küszöböt ε-hoz a definíció alapján!

   a) $\lim \dfrac{3n-1}{4n+99}$ b)[hf] $\lim \dfrac{7n+4}{2n-1}$ c) $\lim \dfrac{n-6}{6n^2+16}$

3.[hf] Lenkétől vizsgán megkérdezik a sorozat konvergenciájának fogalmát. Ezt válaszolja:
„Az a_n sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik olyan a szám, amelyhez a_n egyre közelebb kerül.” Meg fog bukni?
Lenke az ismételt vizsgán is ugyanezt a kérdést kapja. Most így felel:
„Az a_n sorozat pontosan akkor tart a-hoz, ha $|a_n - a|$ tart 0-hoz.” Most átmegy?

4. A gonosz varázsló minden nap arannyá változtatja a Földön lévő vízmennyiség felét. Mennyi idő múlva csökken a vízkészlet 1 pohárnyi alá? (A Földön kb. $1386 \cdot 10^6$ km^3 víz van.)
[hf] Mennyi idő múlva marad csak 1 vízmolekula?

5. Számoljuk ki a határértékeket:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{-1}}{1+n^{-2}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5 - 216n^2 + n - 2}{-n^8 + 500n^4 + 86}$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{22} + 18n^{18}}{8n^{22} - 4n^2}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 82n^{47} + 23610}{-14n^{25} + 2n^8 + 3}$

   e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n + 401n + 402}{2^{2n} + n - 88}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{(5-2n)n!}$

   g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n-3} - \sqrt{n+9}\right)$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+5n-3} - \sqrt{2n^2-n}\right)$

   i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{25n! + n^{25}}{25n^n}$

6. Igaz? Hamis?

   a) ha $a_n \to a$, akkor $a_n^2 \to a^2$
   b) ha $a_n^2 \to a^2$, akkor $a_n \to a$
   c) ha $a_n > 0$ és $b_n \to \infty$, akkor $a_n b_n \to \infty$

7.[hf] Számold ki a következő határértékeket:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2/3} + 8n^{\sqrt{3}} + \sqrt{n} + 12}{n^2 + 5n - 7}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{-2} + 4}{2n^{-3} - 1}$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9\sqrt[3]{n} - 3\sqrt{2n} + 1}{\sqrt[4]{n} + \sqrt{3n}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_{10}(n^2) + 3}{\log_3(n) - 1}$

   e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 2^n + 3^n}{n^{2n} - 3n^2}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n + n^7 + 7}{2^{2n} + (2n)^2 + 2}$

   g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4 + 2n} - n^2\right)$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - 3n + 3} - \sqrt[3]{n^3 + 123n^2 - 1}\right)$

Emlékeztető

– Az $a_1,\ a_2,\ \dots\ a_k,\ \dots$ valós számokból álló *sorozatot* $\{a_n\}$ jelöli.

– Az a_n sorozat *konvergens* és határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{R}$, hogy $n > n_\varepsilon$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. Ezt kétféleképp lehet jelölni: $a_n \to A$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.