Feladatok az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
4. hét

1. Számoljuk ki:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{3}{n^3}\right)^{n^3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{2n-3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n}{2}+1}$

d)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n}+3}{\sqrt{n}-2}\right)^{n}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^{n}$ f)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2+3}\right)^{4n^2}$

g)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+2n-5}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n}{2}+1}$

2. Felhasználva hogy $\sqrt[n]{n}\to 1$ és $\sqrt[n]{x}\to 1$ minden $x>0$ esetén, számoljuk ki:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[99n]{n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{99n^{99}}$ c)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+5}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+3n-2}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}}$ f)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n!]{n}$

g)$^{\text{hf}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

3. Legyen $p(x)$ és $q(x)$ egy-egy valós polinom. Adjon módszert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$ meghatározására!

4. Konvergensek-e a sorok? Ha igen, mennyi az összegük?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ c)$^{\text{hf}}$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+2)}\right)$

5. Konvergensek-e a sorok? Ha igen, mennyi az összegük?

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}}$ b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^{n+1}}{5^n}$

d)$^{\text{hf}}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+1}+(-5)^n}{3^{2n+2}}$ e)$^{\text{hf}}$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 3^{n+1}}{3^{2n+1}}$ f)$^{\text{hf}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-1}-2^n}{4^{2n-1}}$

Emlékeztető

– A rendőr-elv szerint, ha az $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatokra valamilyen $N\in\mathbb{R}$ számra $a_n\le b_n\le c_n\}$ teljesül minden $n>N$ esetén, valamint $a_n\to A$ és $c_n\to A$, akkor $\{b_n\}$ is konvergens, és $b_n\to A$.

– Az előadáson tanultak szerint $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)=e^k$ minden $k\in\mathbb{R}$ esetén.

– Ha $\{a_n\}$ egy sorozat, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ szimbólumot *numerikus sornak* nevezzük. A sor *összege* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, ha ez a határérték létezik. Ha a határérték létezik és véges, a sor *konvergens.* A q *hányadosú mértani sor* pontosan akkor konvergens, ha $|q|<1$, és ekkor összege $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_1\cdot q^n=\frac{a_1}{1-q}$.