Feladatok az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
5. hét

1. Mely sorok konvergensek és divergensek? (Használjuk a majoráns- és minoráns-elvet.)

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$ b)$^{\text{hf}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{n^7}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^3-7}{n^5+2n^4}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-n+3}{3n^4+2n^2+7}$

   e)$^{\text{hf}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-n+3}{2n^5+2n^2+6}$ f)$^{\text{hf}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^{n+1}}{1+6^{n-1}}$ g)$^{\text{hf}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}$

2. Mely sorok konvergensek és divergensek? (Használjuk a gyök- és hányadoskritériumot.)

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n-2}}{(n+1)!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}}{n^4}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2}$ d)$^{\text{hf}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^5 2^{3n+1}}$

   e)$^{\text{hf}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n} n^7}{3^{2n+1}}$ f)$^{\text{hf}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)3^{n-1}}{5^{n+1}}$ g)$^{\text{hf}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)4^{n-1}}{(n+5)\cdot n!}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$

   i)$^{\text{hf}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^{n^2}$

3. Igaz? Hamis?

   a) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$.

   b) Ha $a_n \to 0$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.

   c) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergens.

4. Abszolút konvergensek? Feltételesen konvergensek? Divergensek?

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ c)$^{\text{hf}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$

   d)$^{\text{hf}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n+1}$ e)$^{\text{hf}}$ $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n-2}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^n$

Emlékeztető

– *Majoráns-elv*: Ha $0 \le b_n \le a_n$, és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is konvergens.

– *Minoráns-elv*: Ha $0 \le b_n \le a_n$, és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergens.

– *Gyökkritérium (Cauchy)*: Legyen $a_n \ge 0$ és $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Ha $q < 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, ha $q > 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens. Ha $q = 1$, akkor mindkét eset előfordulhat.

– *Hányadoskritérium (d'Alambert)*: Legyen $a_n \ge 0$ és $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Ha $q < 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, ha $q > 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens. Ha $q = 1$, akkor mindkét eset előfordulhat.

– A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor Leibniz-sor, ha $\{a_n\}$ váltakozó előjelű, $\{|a_n|\}$ monoton csökkenő, és $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Minden Leibniz-sor konvergens.