Feladatok az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
10. hét

1. Végezzük el a teljes függvényvizsgálatokat, rajzoljuk le a függvényeket.

a) $x \mapsto x - \dfrac{1}{x^2}$ b) $x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$ c) $x \mapsto x^2 e^x$

d)hf $x \mapsto 2x^3 - 9x^2 + 12x$ e)hf $x \mapsto e^{-x^2}$ f)hf $\sin^2 x - 2\sin x$

g)hf e^{-x^2} h)hf $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

2. Számoljuk ki a következő Taylor-polinomokat, és írjuk fel a hozzájuk tartozó hibatagot!

a) $f(x) = (x-2)^{-2}$, középpont: 3, $T_3(x) = ?$
b) $f(x) = \sin x$, középpont: π, $T_n(x) = ?$
c)hf $f(x) = e^x$, középpont: 0, $T_5(x) = ?$
d)hf $f(x) = \ln\cos x$, középpont: 0, $T_6(x) = ?$

3. ln(1.1)-et szeretnénk közelítőleg kiszámolni az $\ln(1+x)$ függvény 0 közepű Taylor-polinomja segítségével. Hányadik tagig kell elmennünk, hogy a közelítés hibája 10^{-8} alá csökkenjen?

4.hf Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 5x - 3 + \sin 2x$ függvény $x_0 = 0$ középpontú harmadrendű Taylor-polinomját és a hozzá tartozó hibatagot! Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha $f(0.1)$ értékét $T_3(0.1)$ értékével közelítjük?

Emlékeztető

– Egy függvény teljes vizsgálata alatt az alábbi tulajdonságok vizsgálatát értjük: értelmezési tartomány, zérushelyek, párosság/páratlanság/periodicitás, folytonosság és határértékek, monotonicitás, lokális szélsőértékek, konvexitás/konkávitás, inflexiós pontok, grafikon és értékkészlet.

– Egy n-szer deriválható függvény *a körüli n. rendű Taylor-polinomja*:
$T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. A közelítés *hibatagja:* $R_n(x,\xi) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$
Taylor tétele: Ha $f^{(n)}$ differenciálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor létezik egy $\xi \in [a,b]$, hogy $f(b) = T_n(b) + R_n(b,\xi)$.