Feladatok az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
12. hét

1. Alkalmas helyettesítéssel számoljuk ki a következő integrálokat.

a) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})}\,dx$ d) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+8}\,dx$ f) $\displaystyle\int x^2\sin(x^3)\,dx$ g)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \sin x e^{\cos x}\,dx$ h)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \sin\ln x\,dx$

i)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ j)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ k)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ l)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

m)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ n)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

2. Keressük meg a primitív függvényeket a parciális törtekre bontás módszerével.

a) $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x-2}{(x+2)^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)}\,dx$

d)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx$ e)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx$ f)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+6x+9}\,dx$

g)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{2x+3}{4x^2-4x+10}\,dx$ h)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$ i)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+x-2}\,dx$

Emlékeztető

– A *helyettesítéses integrálás*: $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt|_{t=\varphi^{-1}(x)}$, amennyiben $\varphi'(t)<0$ vagy $\varphi'(t)>0$ a kérdéses intervallumon.
(Nem korrekt, ám könnyen megjegyezhető erre így gondolni: $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f(x)\left(\frac{dt}{dt}\right)\,dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}\,dt = \int f(x(t))x'(t)\,dt$. Ekkor valójában egy $x=x(t)$ helyettesítést végzünk. A kapott eredmény t függvénye, azaz vissza kell helyettesíteni t helyébe az $x(t)$ függvény inverzét.)

– Racionális törtfüggvények integrálásának lépései:
- polinomosztás (ha a számláló foka kisebb, mint a nevező foka, nem lehet/szükséges elvégezni)
- a nevező szorzattá bontása (ha a nevező eleve elsőfokú, és negatív diszkriminánsú tényezők szorzata, nem lehet/szükséges elvégezni, ilyenkor azt érdemes csak ellenőrizni, hogy különböző tényezőket hatványnak egybe lehet-e vonni)
- parciális törtekre bontás
- a parciális törtek integrálása (az előző héten tanult módszerek segítségével)

– Alkalmas helyettesítéssel racionális törtre visszavezethető függvénytípusok:
- $R(a^x)$ esetén, ahol R egy racionális tört: $t=a^x$ helyettesítéssel

- $R(\sqrt[m]{x})$ esetén $t = \sqrt[m]{x}$ helyettesítéssel (ha többfajta gyök szerepel a függvényben, ezek rendjének legkisebb közös többszörösét érdemes venni)
- $R(\sin x, \cos x)$ esetén $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel
- $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ esetén $t = \frac{x}{2}$ helyettesítéssel
- $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ esetén a gyökös kifejezés a szokásos átalakításokkal (teljes négyzetté alakítás, kiemelés) $\sqrt{\pm 1 \pm (Ax + B)^2}$ alakúra hozható, majd az alábbi helyettesítések valamelyikével az előző két eset valamelyikére a függvény visszavezethető:
  1. $\sqrt{1 - (Ax + B)^2}$ esetén az $Ax + B = \sin t$ helyettesítés
  2. $\sqrt{1 + (Ax + B)^2}$ esetén az $Ax + B = \operatorname{sh} t$ helyettesítés
  3. $\sqrt{(Ax + B)^2 - 1}$ esetén az $Ax + B = \operatorname{ch} t$ helyettesítés