

Differenciálegyenletekhez tartozó feladatok és megoldásai

1. Oldjuk meg új változó bevezetésével az alábbi differenciálegyenleteket!

a) $y' = \frac{2y^2 + x^2}{xy}$

b) $x^2y' + xy = x^2 + y^2, \quad y(1) = 2$

c) $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$

d) $y' = \frac{1}{x+y}$

Megoldás. a) A differenciálegyenlet az $y' = 2\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ alakra hozható, azaz felírható $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ alakban. Így az $u = \frac{y}{x}$ új ismeretlen függvény bevezetésével szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapunk. A helyettesítés elvégzéséhez számoljuk ki y' értékét: $y = ux$ és $y' = u'x + u$. Behelyettesítve:

$$u'x + u = 2u + \frac{1}{u},$$

ahol $u \neq 0$. A kapott differenciálegyenletet az

$$\frac{uu'}{u^2 + 1} = \frac{1}{x}$$

alakra hozhatjuk. Ebből

$$\int \frac{u}{u^2 + 1} du = \int \frac{1}{x} dx$$
$$\frac{1}{2} \ln |u^2 + 1| = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |C|$$

és

$$u = \pm \sqrt{Cx^2 - 1} \Rightarrow y = \pm x \sqrt{Cx^2 - 1},$$

ahol $C > 0$.

b) Átalakítva:

$$y' + \frac{y}{x} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

amiből az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítés elvégzésével

$$u'x + 2u = 1 + u^2 \Rightarrow \frac{u'}{(u-1)^2} = \frac{1}{x}, u \neq 1.$$

Integrálva:

$$\int \frac{1}{(u-1)^2} du = \int \frac{1}{x} dx,$$

azaz

$$-\frac{1}{u-1} = \ln |x| + \frac{1}{C}.$$

Ebből

$$u = 1 - \frac{C}{C \ln |x| + 1},$$

ami a $C = 0$ választásnál magában foglalja az $u = 1$ partikuláris megoldást is. Az általános megoldás

$$y = x + \frac{Cx}{C \ln |x| + 1}.$$

Helyettesítsük be a megadott kezdeti feltételt. Ekkor $2 = 1 + \frac{C}{C \ln |1| + 1} = 1 + C$, amiből $C = 1$. Tehát a keresett partikuláris megoldás $y_p = x + \frac{x}{\ln |x| + 1}$.

c) Átrendezve

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x},$$

ahol $x, y > 0$. Alkalmazzuk az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítést. Ekkor

$$u'x + u = u + u \ln u \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{u \ln u} = \frac{1}{x},$$

ahol $u \neq 1$.

$$\int \frac{1}{u \ln u} du = \int \frac{1}{x} dx \quad \ln |\ln u| = \ln |x| + \ln |\ln |C||,$$

amiből $u = Ce^x$ és $y = Cxe^x$, ahol $C > 0$. Ezen kívül az $u = 1$ feltételből adódik az $y = x$ partikuláris megoldás.

d) Most a differenciálegyenlet $y' = f(ax + by + c)$, alakú, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $b \neq 0$. Ekkor az $u = ax + by + c$ helyettesítést érdemes alkalmazni, tehát jelen esetben $u = y + x$. Így $y' = u' - 1$, és az egyenlet:

$$u' - 1 = \frac{1}{u},$$

ami egy x -hiányos elsőrendű differenciálegyenlet, azaz szétválasztható változójú. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{uu'}{u+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{u}{u+1} du = \int 1 dx,$$

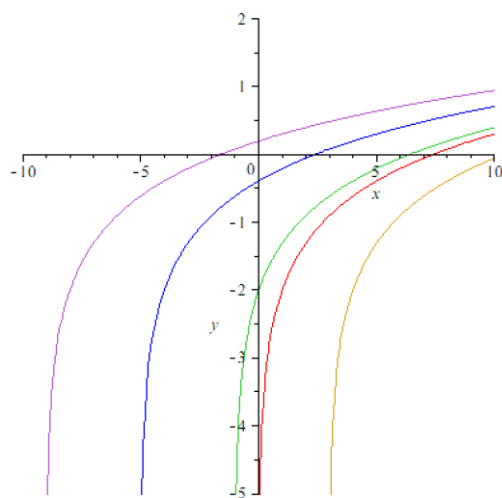
ha $u \neq -1$. Ebből

$$u - \ln |u+1| = x + \ln |C| \quad \Rightarrow \quad e^u = C(u+1)e^x.$$

Mivel C -t nem tudjuk úgy választani, hogy megkapjuk az $u = -1$ megoldást, az összes megoldás $e^u = C(u+1)e^x$, ahol $C \neq 0$, és $u = -1$. Visszaírva az eredeti függvényre: $e^{x+y} = C(x+y+1)e^x$, és $y = -x - 1$.

Írjuk fel az $y' = e^{y+2} - x$ differenciálegyenlet izoklínáinak egyenletét, és rajzoljunk fel kettőt. Van-e lokális szélsőértéke az $P_0(e, -1)$ ponton áthaladó megoldásnak a P_0 pontban?

Megoldás. Az izoklínák egyenlete $K = e^{y+2} - x$, ahol $K \in \mathbb{R}$ egy rögzített konstans. Ebből kifejezhetjük pl. y -t: $y = \ln(x + K) - 2$. A $K = -3; 0; 1, 5, 9$ értékekhez tartozó izoklínák láthatóak az ábrán. Ezek közül a P_0 ponton áthaladó izoklína egyenletére $-1 = \ln(e + K) - 2$,



amiből $K = 0$, azaz az izoklína a nulla meredekségű pontokat tartalmazza. Mivel a ponthoz

tartozó megoldás meredeksége nulla, a megoldás grafikonja P_0 -ban vízszintesen keresztezi az izoklínát. Ebből az is következik, hogy $x > e$ esetén a K meredekség negatív, azaz a megoldás grafikonja $x > e$ esetén nem metszi a $K = 0$ izoklínát. Meggondolható az is, hogy ezen észrevételből az is következik, hogy $x < e$ esetén sem metszi a grafikon a $K = 0$ izoklínát. Tehát a megoldás P_0 előtt szigorúan növekvő és utána szigorúan csökkenő, tehát P_0 -ban lokális szélsőértéke (pontosabban globális maximuma) van.

3. Tekintsük a következő differenciálegyenletet: $y' = (y^2 - 4)x + x - 1$.
- A sík mely pontjaiban párhuzamos az iránymező az $y = -x$ egyenessel? Vázoljuk ezeket a pontokat és jelöljük be néhány vonalelemet!
 - Van-e lokális szélsőértéke vagy inflexiós pontja az $(1, 2)$ ponton átmenő megoldásnak ebben a pontban? (Feltéve, hogy van ilyen megoldás.)

Megoldás. a) Az $y = -x$ egyenes meredeksége $K = -1$, tehát az ezen értékhez tartozó izoklínát kell megkeresni: $-1 = (y^2 - 4)x + x - 1$. Ebből $x(y^2 - 3) = 0$, tehát $x = 0$ vagy $y = \pm\sqrt{3}$. Az ezen pontokhoz tartozó vonalelemek $K = -1$ meredekségű rövid szakaszok.
b) A ponthoz tartozó megoldás meredeksége $K = 1 \cdot (2^2 - 3) - 1 = 0$. A ponthoz tartozó izoklína egyenlete $x = \frac{1}{y^2 - 3}$. Az előző feladathoz hasonlóan végiggondolható, hogy a megoldás meredeksége $x < 1$ esetén negatív, $x > 1$ esetén pozitív. Tehát a megoldásnak van lokális szélsőértéke (pontosabban globális minimuma) a megadott pontban.

4. Oldjuk meg a következő homogén lineáris állandó együtthatós egyenleteket!

a) $y'' - 8y' + 15y = 0$	b) ^{hf} $y'' + 2y' = 0$	c) $y'' - 8y' + 16y = 0$
d) $y'' + 4y' + 13y = 0$	e) ^{hf} $y'' + 25y = 0$	f) $y''' + 2y'' + y' = 0$
g) $y''' + 4y'' + 13y' = 0$	h) $y^{(4)} - y = 0$	i) ^{hf} $y^{(4)} - y^{(3)} = 0$

Megoldás. a) A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$, melynek gyökei $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = 5$. Így az általános megoldás: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}$.
b) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 2\lambda = 0$. Ennek gyökei $0, -2$, és az általános megoldás $y = C_1 + C_2 e^{-2x}$.
c) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$. Ennek egyetlen gyöke $\lambda = 4$. Így (mivel belső rezonancia van) az általános megoldás $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$.
d) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$. A megoldóképlettel ennek megoldásai $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$. Azaz az általános megoldás $y = C_1 e^{-2x} \cos(3x) + C_2 e^{-2x} \sin(3x)$.
e) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 25 = 0$, melynek gyökei $\pm 5i$. Az általános megoldás: $y = C_1 \cos(5x) + C_2 \sin(5x)$.
f) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$. Ennek gyökei $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Így az általános megoldás $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$.
g) A d) feladat megoldása alapján az általános megoldás $y = C_1 e^{-2x} \cos(3x) + C_2 e^{-2x} \sin(3x) + C_3$.
h) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^4 - 1 = 0$. Ennek (komplex) gyökei $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -1$ és $\lambda_4 = -i$. Azaz az általános megoldás $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.
i) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^4 - \lambda^3 = 0$, melynek $\lambda = 0$ háromszoros és $\lambda = 1$ egyszeres gyöke. Így az általános megoldás: $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x$.

5. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémákat!

- $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$
- ^{hf} $y'' + 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = -4$
- $y'' + 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 7$

Megoldás. a) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, melynek gyökei $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Az általános megoldás így $y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x$. Ebből $y' = (C_2 - C_1) e^{-x} \cos x + (-C_2 - C_1) e^{-x} \sin x$. A kezdeti feltételek behelyettesítéséből $2 = C_1$ és $1 = C_2 - C_1$, amiből $C_2 = 3$, és a keresett partikuláris megoldás $y_p = 2e^{-x} \cos x + 3e^{-x} \sin x$.

b) Az előző feladatok módszerét alkalmazva az általános megoldás $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$. Ennek deriváltja $y' = C_1 e^x - 4C_2 e^{-4x}$, azaz a feltételek $3 = C_1 + C_2$ és $-4 = C_1 - 4C_2$. Az egyenletrendszer megoldása $C_2 = \frac{7}{5}$ és $C_1 = \frac{8}{5}$. Tehát a keresett partikuláris megoldás $y_p = \frac{8}{5} e^x + \frac{7}{5} e^{-4x}$.

c) Az általános megoldás most $y = (C_1 + C_2 x) e^{-5x}$. Ebből $y' = (C_2 - 5C_1 - 5C_2 x) e^{-5x}$. A feltételekből $-1 = C_1$ és $7 = C_2 - 5C_1$, tehát $C_2 = 2$, és a keresett megoldás $y_p = (2x - 1) e^{-5x}$.

1. Írjunk fel egy olyan legalacsonyabbrendű valós, állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletet, melynek megoldásai az alábbi függvények! Írjuk fel a differenciálegyenlet általános megoldását is!

a) $2e^{5x} - e^{-3x}$

b) $6x^2 + 5e^{2x}$

c) $7x, \sin 5x$

d) $3x^2e^{2x}, e^{3x}$

e) $6 + e^{3x} \sin x$

Megoldás. a) A fenti függvény csak olyan állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenletnek lehet megoldása, mely karakterisztikus polinomjának 5 és -3 gyöke. Ez azt jelenti, hogy a karakterisztikus polinom legalább másodfokú, azaz a differenciálegyenlet legalább másodrendű. Keressünk olyan másodfokú polinomot, melynek 5 és -3 gyöke: ilyen pl. a $(\lambda - 5)(\lambda + 3) = \lambda^2 - 2\lambda - 15$. Ez a polinom az $y'' - 2y' - 15y = 0$ állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlethez tartozik. Az általános megoldás adódik a polinom gyökeiből: $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-3x}$, ahol C_1, C_2 tetszőleges konstansok.

b) Az előző feladathoz hasonlóan most az adódik, hogy a karakterisztikus polinomnak 0 legalább háromszoros, és 2 egyszeres gyöke. Tehát a polinom legalább negyedfokú, azaz a differenciálegyenlet legalább negyedrendű. Egy ilyen tulajdonságú polinom $\lambda^3(\lambda + 2) = \lambda^4 + 2\lambda^3$, melyhez az $y^{(4)} + 2y''' = 0$ differenciálegyenlet tartozik. Ennek általános megoldása: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{2x}$.

c) Most a karakterisztikus polinomnak 0 legalább kétszeres, és $\pm 5i$ legalább egyszeres gyöke. Tehát a polinom legalább negyedfokú, és a differenciálegyenlet negyedrendű. Egy ilyen tulajdonságú polinom $\lambda^2(\lambda + 5i)(\lambda - 5i) = \lambda^4 + 25\lambda^2$, melyhez az $y^{(4)} + 25y'' = 0$ differenciálegyenlet tartozik. Ennek általános megoldás $y = C_1 + C_2x + C_3 \sin 5x + C_4 \cos 5x$.

d) A karakterisztikus polinomnak 2 legalább háromszoros és 3 legalább egyszeres gyöke, tehát a differenciálegyenlet legalább negyedrendű. Egy megfelelő negyedfokú polinom a $(\lambda - 2)^3(\lambda - 3) = \lambda^4 - 9\lambda^3 + 30\lambda^2 - 44\lambda + 24$, melyhez az $y^{(4)} - 9y''' + 30y'' - 44y' + 24y = 0$ differenciálegyenlet tartozik. Ennek általános megoldása $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x} + C_4e^{3x}$.

2. Oldjuk meg a következő inhomogén lineáris, állandó együtthatós egyenleteket!

a) $y'' - 5y' + 6y = 2 \sin 2x$

b) $y'' - 5y' + 6y = 2xe^x$

c) $y'' - 6y' + 13y = 39$

d) $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 3, y'(0) = 1$

e) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + 4x^2 - 6$

f) $y'' - 3y' + 2y = x + e^x$

g) $y'' - 2y' + y = 6e^x$

h) $y'' + 8y' + 25y = e^{-4x}$

i) $y'' + 2y' = 2x + 3$

j) $y'' + y = \sin x$

Megoldás. a) A hozzátartozó homogén differenciálegyenlet $Y'' - 5Y' + 6Y = 0$, melynek karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Ennek gyökei 2 és 3, így a homogén differenciálegyenlet általános megoldása $Y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. A próbafüggvény módszere alapján az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását $y_p = A \sin 2x + B \cos 2x$ alakban keressük. Ebből $y_p' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$ és $y_p'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$. Beírva ezeket az inhomogén differenciálegyenletbe:

$$-4A \sin 2x - 4B \cos 2x - 5(2A \cos 2x - 2B \sin 2x) + 6(A \sin 2x + B \cos 2x) = 2 \sin 2x,$$

amiből

$$(2A + 10B) \sin 2x + (2B - 10A) \cos 2x = 2 \sin 2x.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $2A + 10B = 2$ és $2B - 10A = 0$. Ezen lineáris egyenletrendszer egyetlen megoldása $A = \frac{1}{26}$ és $B = \frac{5}{26}$. Azaz $y_p = \frac{1}{26} \sin 2x + \frac{5}{26} \cos 2x$, és az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = Y + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{26} \sin 2x + \frac{5}{26} \cos 2x.$$

b) A hozzátartozó homogén egyenlet, és így ennek általános megoldása is, ugyanaz, mint az a) feladatban. Az inhomogén egyenlet egy általános megoldását most $y_p = (Ax + B)e^x$ alakban keressük. Helyettesítsük ezt vissza a deriváltjaival együtt:

$$(Ax + 2A + B)e^x - 5(Ax + A + B)e^x + 6(Ax + B)e^x = 2xe^x \Rightarrow (2Ax - 3A + 2B)e^x = 2xe^x.$$

Ebből $2A = 2$ és $-3A + 2B = 0$, azaz $A = 1$, $B = \frac{3}{2}$ és $y_p = \left(x + \frac{3}{2}\right)e^x$. Az általános megoldás:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \left(x + \frac{3}{2}\right)e^x.$$

c) A hozzátartozó homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$, melynek gyökei $\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm 2i$. Tehát $Y = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x$. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerével $y_p = A$ alakban keressük. Ezt visszahelyettesítve $13A = 39$ adódik, melyből $A = 3$, és az inhomogén általános megoldása

$$y = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x + 3.$$

d) A karakterisztikus egyenlet gyökei -1 és 2 , így a homogén általános megoldása $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$. Az inhomogén rész alapján próbafüggvényre $y_p = Ae^{2x}$ adódna, ami egybeesik a homogén általános megoldásának egy részével, azaz külső rezonancia van. Így módosítjuk a próbafüggvényt $y_p = Axe^{2x}$ alakúra. Ezt deriváltjaival együtt visszahelyettesítve az egyenletbe $A(4x + 4)e^{2x} - A(2x + 1)e^{2x} - 2Axe^{2x} = 3e^{2x}$, vagyis $3Ae^{2x} = 3e^{2x}$ adódik, amiből $A = 1$ és $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + xe^{2x}$. A keresett partikuláris megoldásnak ki kell elégíteni az $y(0) = 3$ és az $y'(0) = 1$ feltételeket. Az általános megoldást deriválva, és ebbe helyettesítve az első feltételből $C_1 + C_2 = 3$, a második feltételből $-C_1 + 2C_2 + 1 = 1$ következik, amiből $C_1 = 2$ és $C_2 = 1$. Tehát a keresett partikuláris megoldás

$$y_{\text{part}} = 2e^{-x} + e^{2x} + xe^{2x}.$$

e) Az előzőekhez hasonlóan adódik, hogy a homogén differenciálegyenlet általános megoldása $Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Az inhomogén partikuláris megoldását $y_p = Ae^{3x} + Bx^2 + Cx + D$ alakban keressük. Visszahelyettesítve az inhomogén differenciálegyenletbe és az együtthatókat páronként egyenlővé téve ebből $2A = 1$, $2B = 4$, $2B - 3C = 0$ és $2B - 3C + 2D = -6$ adódik, amiből $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$, $C = 6$ és $D = 4$. Tehát az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x} + 2x^2 + 6x + 4.$$

f) A homogén általános megoldása megegyezik az e) feladatével. Az inhomogén általános megoldását rezonancia miatt $y_p = Ax + B + Cxe^x$ alakban keressük. Ebből a $2A = 1$, $-3A + 2B = 0$ és $-C = 1$ lineáris egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{4}$ és $C = -1$. Az általános megoldás:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} - xe^x.$$

g) A homogén általános megoldása $Y = (C_1x + C_2)e^x$. Most is rezonancia van, így az inhomogén egy partikuláris megoldását $y_p = Ax^2e^x$ alakban keressük. Visszahelyettesítve $A = 3$ adódik, azaz

$$y = (C_1x + C_2)e^x + 3x^2e^x.$$

h) Most $Y = C_1e^{-4x} \cos 3x + C_2e^{-4x} \sin 3x$ és $y_p = \frac{1}{9}e^{-4x}$. Így az általános megoldás:

$$y = C_1e^{-4x} \cos 3x + C_2e^{-4x} \sin 3x + \frac{1}{9}e^{-4x}.$$

i) A homogén általános megoldása $Y = C_1 + C_2e^{-2x}$. Megint rezonancia van, így az inhomogén egy partikuláris megoldását $y_p = Ax^2 + Bx$ alakban keressük. Visszahelyettesítve ebből $A = \frac{1}{2}$ és $B = 1$ adódik, így az általános megoldás

$$y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{x^2}{2} + x.$$

j) Most $Y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Rezonancia miatt az $y_p = Ax \sin x + Bx \cos x$ függvényt használjuk az inhomogén egy partikuláris megoldásának megkereséséhez. Ekkor $y_p = -\frac{1}{2}x \cos x$ adódik, és az általános megoldás:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2}x \cos x.$$

3. Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket!

a) $y^{(4)} - 8y''' + 16y'' = 2x - 9$

b) $y'' + y = 2 \sin x \cos x$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$

c) $y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$

Megoldás. a) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^4 - 8\lambda^3 + 16\lambda^2 = 0$, melynek 0 is és 4 és kétszeres gyöke. Így a hozzátartozó homogén differenciálegyenlet általános megoldása $Y = C_1x + C_2 + (C_3x + C_4)e^{4x}$. Külső rezonancia miatt az inhomogén egy partikuláris megoldását $y_p = Ax^3 + Bx^2$ alakban keressük, melyből $A = \frac{1}{48}$ és $B = -\frac{1}{4}$. Tehát az inhomogén általános megoldása

$$y = C_1x + C_2 + (C_3x + C_4)e^{4x} + \frac{x^3}{48} - \frac{x^2}{4}.$$

b) A homogén differenciálegyenlet általános megoldása $Y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Mivel $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, nincs rezonancia, és az inhomogén egy partikuláris megoldását $y_p = A \sin 2x + B \cos 2x$ alakban keressük. Ebből $y_p = -\frac{1}{2} \sin 2x$, és $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2} \sin 2x$. A keresett partikuláris megoldás megtalálásához felírjuk a kapott általános megoldásra a megadott feltételeket. Ebből $C_2 = 1$ és $C_2 - \frac{2}{3} = 1$ adódik, tehát a keresett partikuláris megoldás

$$y_{\text{part}} = \frac{5}{3} \sin x + \cos x - \frac{1}{3} \sin 2x.$$

c) A karakterisztikus polinom $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = \lambda^2(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 2)$, melynek gyökei $-1, 1, 2$. Tehát a homogén differenciálegyenlet általános megoldása $Y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x}$. Rezonancia miatt az inhomogén egy partikuláris megoldását $y_p = Axe^{2x} + Be^{-2x}$ alakban keressük. Visszahelyettesítve $A = \frac{1}{6}$ és $B = -\frac{1}{24}$, tehát az inhomogén általános megoldása

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x} + \frac{x}{6}e^{2x} - \frac{1}{24}e^{-2x}.$$

1. A definíció alapján számoljuk ki a következő függvények Laplace-transzformáltját:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t = 11 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} & \text{b) } b(t) = \begin{cases} 3 & \text{ha } t \in [11, 12] \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \\ \text{c) } c(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t > 11 \\ 0 & \text{ha } t \leq 11 \end{cases} & \text{d) } d(t) = \begin{cases} t - 11 & \text{ha } t > 11 \\ 0 & \text{ha } t \leq 11 \end{cases} \end{array}$$

Megoldás. a) $A(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} a(t) dt = 0$, mert az integrálandó függvény egy pont kivételével nulla.

$$\text{b) } B(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} b(t) dt = \int_{11}^{12} 3e^{-st} dt = \left[3 \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{11}^{12} = 3 \frac{e^{-11s} - e^{-12s}}{s}.$$

$$\text{c) } C(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} c(t) dt = \int_{11}^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{11}^b e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{11}^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-sb}}{s} + \frac{e^{-11s}}{s} \right) = \frac{e^{-11s}}{s}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } D(s) &= \int_{11}^{\infty} e^{-st} (t - 11) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{11}^b e^{-st} (t - 11) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\left[(t - 11) \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{11}^b - \int_{11}^b \frac{e^{-st}}{-s} dt \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[(t - 11) \frac{e^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_{11}^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-(b - 11) \frac{e^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2} + \frac{e^{-11s}}{s^2} \right) = \frac{e^{-11s}}{s^2}. \end{aligned}$$

2. Keressük meg a következő függvények Laplace-transzformáltját:

$$\text{a) } 7 \sin 3t \qquad \text{b) } 6t^2 + 3t - 2 \qquad \text{c) } t \cos 7t \qquad \text{d) } e^{2t} \sin 3t$$

Megoldás. a) A Laplace transzformáció linearitása, és a táblázatban szereplő függvényeket felhasználva $\mathcal{L}\{7 \sin 3t\}(s) = 7 \mathcal{L}\{\sin 3t\}(s) = 7 \cdot \frac{3}{s^2 + 3^2} = \frac{21}{s^2 + 9}$.

b) Hasonlóan: $\mathcal{L}\{6t^2 + 3t - 2\}(s) = 6 \mathcal{L}\{t^2\} + 3 \mathcal{L}\{t\} - 2 \mathcal{L}\{1\} = \frac{12}{s^3} + \frac{3}{s^2} - \frac{2}{s}$.

c) Most $\mathcal{L}\{t \cos 7t\} = \frac{s^2 - 49}{(s^2 + 49)^2}$.

d) $\mathcal{L}\{e^{2t} \sin 3t\} = \frac{3}{(s - 2)^2 + 9}$.

3. Számoljuk ki a következő függvények inverz Laplace-transzformáltját:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{3}{s} + \frac{1}{s - 5} - \frac{7}{s - 2} & \text{b) } \frac{11}{s - 3} + \frac{4}{s^2 - 25} & \text{c) } \frac{7}{s^2 + 4} & \text{d) } \frac{s + 4}{s^2 + 9} \\ \text{e) } \frac{3}{s^2 + 4s + 14} & \text{f) } \frac{4}{s^2 + 2s} & \text{g) } \frac{3}{s^3 + 2s^2} \end{array}$$

Megoldás. a) A Laplace transzformáció linearitása miatt, és minthogy $\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$, valamint általánosabban $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s - a}$, a megoldás $3 + e^{5t} - 7e^{2t}$.

b) Mivel $\frac{11}{s - 3} + \frac{4}{s^2 - 25} = 11 \cdot \frac{1}{s - 3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{s^2 - 25}$, a táblázatban feltüntetett Laplace-transzformáltak felhasználásával a megoldás $11e^{3t} + \frac{4}{5} \text{sh}(5t)$.

c) Hasonlóan, a megoldás $\frac{7}{2} \sin(2t)$.

d) Átalakítva a megadott függvényt: $\frac{s + 4}{s^2 + 9} = \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{s^2 + 9}$, a megoldás $\cos(3t) + \frac{4}{3} \sin(3t)$.

e) Teljes négyzetté alakítunk: $\frac{3}{s^2 + 4s + 14} = \frac{3}{(s + 2)^2 + 10} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{(s + 2)^2 + 10}$, tehát a megoldás $\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot e^{-2t} \sin(\sqrt{10}t)$.

f) Itt $\frac{4}{s^2 + 2s} = 4 \frac{1}{(s + 1)^2 - 1} = 4e^{-t} \text{sh } t$. A megoldás parciális törtekre bontással is megkapható.

g) Parciális törtekre bontással: $\frac{3}{s^3 + 2s^2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s + 2}$. Ebből a megoldás $-\frac{3}{4} + \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} e^{-2t}$.

4. Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket. (Segítség: vegyük mindkét oldal Laplace-transzformáltját, oldjuk meg az így kapott algebrai egyenletet, majd a megoldásnak keressük meg az inverz Laplace-transzformáltját!)

- a) $y' = y, \quad y(0) = 3$
- b) $y' = 7y, \quad y(0) = -1$
- c) $y'' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2$
- d) $y'' = -y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
- e) $2y' - y = 0, \quad y(0) = 1/2$
- f) $y' + 7y = 6, \quad y(0) = 0$
- g) $2y' + y = e^{2t}, \quad y(0) = 1$
- h) $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
- i) $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
- j) $y' + y = \sin 3t, \quad y(0) = 0$

Megoldás. a) Legyen $\mathcal{L}\{y\}(s) = Y$. Ekkor $\mathcal{L}\{y'\}(s) = sY - y(0) = sY - 3$. Így a differenciálegyenlet $sY - 3 = Y$, amiből $Y = \frac{3}{s-1}$. Mivel $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$, Y inverz Laplace-transzformáltja, azaz a keresett megoldás $y = 3e^t$.

b) Az egyenlet transzformáltja most $sY + 1 = 7Y$, amiből $Y = \frac{-1}{s-7}$, tehát a megoldás $y = -e^{7t}$.

c) Az egyenlet transzformáltja $s^2Y + 2 = -Y$. Ebből $Y = \frac{-2}{s^2+1}$, vagyis $y = -2 \sin t$.

d) Az egyenlet transzformáltja $s^2Y - s = -Y$, amiből $Y = \frac{s}{s^2+1}$. A keresett megoldás $y = \cos t$.

e) Az egyenlet transzformáltja $2(sY - \frac{1}{2}) - Y = 0$. Ebből $Y = \frac{1}{2s-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-\frac{1}{2}}$. Így a keresett megoldás $y = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}$.

f) Az egyenletet transzformálva adódik, hogy $sY + 7Y = \frac{6}{s}$. Ebből átrendezve és parciális törtekre bontással $Y = \frac{6}{s(s+7)} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{s} - \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{s+7}$. Ennek inverz transzformáltja $y = \frac{6}{7} - \frac{6}{7}e^{-7t}$.

g) Most az egyenletből $2(sY - 1) + Y = \frac{1}{s-2}$, amit átrendezve azt kapjuk, hogy $Y = \frac{2s-3}{(s-2)(2s+1)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{2}}$. Ebből $y = \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{-\frac{1}{2}t}$.

h) A transzformált egyenlet $s^2Y + 3sY + 2Y = \frac{1}{s+1}$, amiből $Y = \frac{1}{(s^2+3s+2)(s+1)} = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1}$. Ennek az inverz transzformáltja $y = -e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t}$.

i) Az egyenlet $s^2Y - s + 2(sY - 1) + 5Y = 0$, amiből $Y = \frac{s+2}{s^2+2s+5} = \frac{s+2}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+1)^2+4}$. Ebből a megoldás $y = e^{-t} \cos(2t) + \frac{1}{2}e^{-t} \sin(2t)$.

j) A transzformált egyenlet $sY + Y = \frac{3}{s^2+9}$, amiből $Y = \frac{3}{(s^2+9)(s+1)} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{-\frac{3}{10}s+\frac{3}{10}}{s^2+9} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{3}{10} \cdot \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{s^2+9}$, amiből a megoldás $\frac{3}{10}e^{-t} - \frac{3}{10} \cos(3t) + \frac{1}{10} \sin(3t)$.

5. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az alábbi kezdetiérték-problémákat:

- a) $x' = x + 4y, y' = 2x - y, x(0) = 2, y(0) = -2$
- b) $x' = 2x - 3y, y' = 3x + 2y, x(0) = 1, y(0) = 4$
- c) $x' = 5x - y, y' = 3x + y, x(0) = -1, y(0) = 2$
- d) $x' = -8y, y' = 2x, x(0) = 1, y(0) = -2$

Megoldás. a) Mindkét egyenletet transzformáljuk, és használjuk az $X = \mathcal{L}\{x\}(s), Y = \mathcal{L}\{y\}(s)$ jelöléseket. A transzformált egyenletrendszer: $sX - 2 = X + 4Y$, illetve $sY + 2 = 2X - Y$. Az egyenletrendszerből X -et és Y -t kifejezve $X = \frac{2}{s+3}$ és $Y = \frac{-2}{s+3}$ adódik, melyből a megoldás: $x = 2e^{-3t}$ és $y = -2e^{-3t}$.

b) Az egyenletrendszer transzformáltja $sX - 1 = 2X - 3Y$ és $sY - 4 = 3X + 2Y$, melynek megoldása $X = \frac{s-14}{(s-2)^2+9} = \frac{s-2}{(s-2)^2+9} - 4 \cdot \frac{3}{(s-2)^2+9}$, valamint $Y = \frac{4s-5}{(s-2)^2+9} = 4 \cdot \frac{s-2}{(s-2)^2+9} + \frac{3}{(s-2)^2+9}$. Így az eredeti differenciálegyenlet-rendszer megoldása $x = e^{2t} \cos(3t) - 4e^{2t} \sin(3t)$ és $y = 4e^{2t} \cos(3t) + e^{2t} \sin(3t)$.

c) Az egyenletrendszer transzformáltja $sX + 1 = 5X - Y$ és $sY - 2 = 3X + Y$, melynek megoldása $X = \frac{-s-1}{s^2-6s+8} = \frac{-s-1}{(s-2)(s-4)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s-4}$ és $Y = \frac{2s-13}{s^2-6s+8} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s-4}$. Tehát az eredeti egyenletrendszer megoldása $x = \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{5}{2}e^{4t}$, illetve $y = \frac{9}{2}e^{2t} - \frac{5}{2}e^{4t}$.

d) A transzformált rendszer $sX - 1 = -8Y$ és $sY + 2 = 2X$. Ennek megoldása $X = \frac{s+16}{s^2+16} = \frac{s}{s^2+16} + 4 \cdot \frac{4}{s^2+16}$, és $Y = \frac{-2s+2}{s^2+16} = -2 \cdot \frac{s}{s^2+16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{s^2+16}$. Tehát az eredeti rendszer megoldása $x = \cos(4t) + 4\sin(4t)$, és $y = -2\cos(4t) + \frac{1}{2}\sin(4t)$.