

1. Számoljuk ki:

a) $\iint_T y^2 dT = ? \quad T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

b) $\iint_T x^2 y dT = ? \quad T = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

c) $\iint_T 7xy^4 dT = ? \quad T = \{(x, y) \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq \sqrt{3}x\}$

2. Számítsuk ki az $\iint_T \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} dT$ integrál értékét, ha T az $4 \leq x^2 + y^2 \leq 25, x \leq 0, y \geq 0$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány.

3. Számoljuk ki az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű henger és a $z = 0$, valamint a $z = 2 - x - y$ egyenletű síkok által határolt térrész térfogatát!

4. A V korlátos térrész határai a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, illetve a $z = 1$ egyenletű felületek. Számítsuk ki az $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dV$ integrál értékét!

5. Számoljuk ki a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ egyenletű felületek által határolt korlátos térrész térfogatát!

6. Számítsuk ki az $\iiint_V xyz dV$ integrál értékét, ahol a V korlátos térrész az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ gömb belsejének az $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ térfelületre eső része.

7. Számoljuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ és a $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott térrész térfogatát!

Emlékeztető

– *Integráltranszformáció:* Legyen $A, B \subset \mathbb{R}^n, f: A \rightarrow \mathbb{R}, \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): B \rightarrow A$ deriválható, kölcsönösen egyértelmű függvény.

Ekkor $\varphi'(\mathbf{x})$ egy olyan $n \times n$ -es mátrix, amelynek (i, j) eleme $(\varphi_j)'_i(\mathbf{x})$. Igaz a következő:

$$\int_A f(\mathbf{x}) dA = \int_B (f \circ \varphi)(\mathbf{y}) \cdot |\det \varphi'(\mathbf{y})| dB.$$

– Egy gyakori integráltranszformáció a $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ *polártranszformáció*. Ekkor $\varphi(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$, és $|\det \varphi(r, \alpha)| = r$. Azaz, ha $A \subset \mathbb{R}^2$ egy R sugarú körlemez, akkor

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) \cdot r d\alpha dr.$$

– A *hengerkoordinátarendszer* \mathbb{R}^3 -ban: $(r, \phi, z) \mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$. A hengerkoordinátákra való áttérés Jacobi-determinánsa: $\det |J| = r$.

– A *gömbi polárkoordinátarendszer* \mathbb{R}^3 -ban: $(r, \theta, \phi) \mapsto (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta)$, ahol $r \in [0, \infty), \theta \in [0, \pi]$ és $\phi \in [0, 2\pi]$. A gömbi koordinátákra való áttérés Jacobi determinánsa $\det |J| = r^2 \cos \theta$.