1. Határozzuk meg a következő sorok konvergenciatartományát!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}(x-1)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!}(x+7)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(n+3)}{n^2+3}x^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n^2 \cdot 3^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}x^{3n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n}(x-2)^{2n}$

2. Határozzuk meg a következő sorok konvergenciasugarát!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}}x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}x^n$

3. Adjuk meg az alábbi függvények x_0 bázispontú Taylor-sorfejtését és annak konvergenciatartományát!

a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $x_0 = 0$; $x_0 = 5$ b) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $x_0 = 2$; $x_0 = -5$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$, $g(x) = \frac{x^5}{x^2+3}$, $x_0 = 0$ d) $f(x) = \frac{1}{x+7}$, $g(x) = \frac{3x^4}{x+7}$, $x_0 = 0$

4. Írjuk fel az alábbi függvények x_0 pontbeli Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát!

a) $f_1(x) = \sin 3x^2$ $x_0 = 0$ b) $f_2(x) = e^{4x}$ $x_0 = 0$; $x_0 = 3$

c) $f_3(x) = \operatorname{sh} 2x^4$, $x_0 = 0$ d) $f_4(x) = e^{-2x} \operatorname{ch} 5x$, $x_0 = 0$

5. Adjuk meg az $f(x) = 5x^3e^{-3x^2}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorfejtését és annak konvergenciatartományát! Számítsuk ki $f^{(100)}(0)$ és $f^{(101)}(0)$ értékét!

6. Írjuk fel az $f(x) = \frac{1}{x+3}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorfejtését, és határozzuk meg a konvergenciasugarat (R_1-et)! Az f függvény sorfejtésére támaszkodva írjuk fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú sorfejtését!

a) $g(x) = \ln(x+3)$, $R_2 =?$ b) $h(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$, $R_3 =?$

7. Tudjuk, hogy $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$, $R = 1$.

a) Írjuk fel az $f(x) = \ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right)$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát, és adjuk meg a konvergenciasugarat!

b) Az f függvény sorfejtését felhasználva adjuk meg az $\int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right) dx$ integrál értékét az f függvény negyedfokú Taylor-polinomjának felhasználásával, és becsüljük meg a hibát!

Emlékeztető

– Az $f_n(x) = a_n(x-a)^n$ tagokból képzett függvénysor neve a *körüli hatványsor*. Azon x-ek halmaza, amelyekre $\sum a_n(x-a)^n$ konvergens, egy intervallum, melynek neve: *konvergenciaintervallum*. Ennek két végpontja $a-r$ és $a+r$, ahol $r = \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$ a *konvergenciasugár*. Időnként hasznosabb ezt így kiszámolni: $r = \left(\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1}$, ha ez a határérték létezik egyáltalán. Az f függvény $a \in \mathbb{R}$ pont körüli *Taylor-sora*: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.