

Matematika A2c megoldások a lineáris algebra és többváltozós függvények témakörhöz

1. Számítsuk ki a megadott mátrixok rangját, valamint az A , B , C mátrixok inverzét, ha létezik. A tanult módszerek közül használjunk minél többet.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad C^{\text{ad}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad E^{\text{ad}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A rangok kiszámításához sor- és oszlopműveleteket használunk.

$$r(A) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

$$\begin{aligned} r(B) &= r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 3 \end{aligned}$$

$$r(C) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

$$r(D) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\begin{aligned} r(E) &= r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 0 & -2 & -24 & -20 \\ 0 & -10 & -80 & -70 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 12 & 10 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix}\right) = \\ &= r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 \end{aligned}$$

Mint hogy egy négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha a determinánsa nem nulla, azaz a rangja maximális, a feladatban szereplő három négyzetes mátrix közül A és B invertálható, C nem. Ebből A inverzét adjungálttal, B inverzét sorműveletekkel határozzuk meg. Az elsőhöz az előjeles aldeterminánsok $\bar{A}_{11} = 5$, $\bar{A}_{12} = -7$, $\bar{A}_{21} = -2$ és $\bar{A}_{22} = 1$. Így az adjungált:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Másrészt $\det A = 1 \cdot 5 - 7 \cdot 2 = -9$. Tehát az inverze

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Most meghatározzuk B inverzét:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Legyen $\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ és $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Oldjuk meg az 1. feladatbeli A és B mátrixokkal az

$A\vec{x} = \vec{a}$ és $B\vec{x} = \vec{b}$ egyenletrendszer (egyiket Gauss-eliminációval, másikat az inverz mátrix módszerével)

Megoldás. Az első egyenletet az inverz mátrix módszerével oldjuk meg. Az $A\vec{x} = \vec{a}$ egyenletből $A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{a}$, azaz $\vec{x} = A^{-1}\vec{a}$. Tehát

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

A $B\vec{x} = \vec{b}$ meghatározta egyenletrendszer kibővített mátrixára alkalmazzuk a Gauss-eliminációt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -14 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -24 \\ 0 & -1 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array} \right]$$

Ebből a $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ jelölést használva a kapott egyenletek $x = -9$, $-y = 1$ és $-z = -5$. Tehát

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3. Hány független vektor választható ki közülük? Mennyi a generált altér dimenziója?

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Mindkét kérdésre azon mátrix rangja a válasz, melynek oszlopai a megadott vektorok.

a)

$$r\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3$$

b)

$$\begin{aligned} r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 \end{aligned}$$

4. Oldjuk meg az $A\vec{x} = \vec{b}$ egyenletrendszert Gauss-eliminációval! Mi A rangja?

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Megoldás. a) Legyen $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -12 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \end{array} \right]$$

Mivel az utolsó sornak megfelelő egyenlet $0 \cdot x + 0 \cdot y = -6$, az egyenletrendszernek nincs megoldása. Az alaplátrix rangja 2.

b) Legyen $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 10 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Az utolsó sor egy lehetetlen feltételt ad, így az egyenletrendszernek nincs megoldása. Az alaplátrix rangja 2.

c) Legyen $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A „kinullázást” nem lehet tovább folytatni. Jelen esetben a 3. oszlopot nem sikerült nullázni. Ez azt jelenti, hogy a z szabadon választható paraméter segítségével írhatóak fel x és y értékei. Az egyenletek: $y + 2z = 3$ és $x - z = -2$, amiből $y = 3 - 2z$ és $x = z - 2$. Tehát végtelen sok

megoldásunk van, melyek $\vec{x} = \begin{bmatrix} z-2 \\ 3-2z \\ z \end{bmatrix}$, ahol $z \in \mathbb{R}$ szabadon választható paraméter. Az alaplátrix rangja 2.

5. Hogyan kell α, β -t megválasztani, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása? Hát hogy végtelen sok megoldása legyen?

$$\begin{aligned} -y + 2z &= 3 \\ x + 3y &= \beta \\ -2x + \alpha y + z &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás. Egy lineáris egyenletrendszernek akkor van megoldása, ha az A együtthatómátrixának rangja megegyezik az A_b kibővített mátrixának rangjával. Ha ezen felül mindkét

rang megegyezik az ismeretlenek számával, akkor egyetlen egy megoldás van. Kiszámoljuk a két mátrix rangját.

$$\begin{aligned} r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & \beta \\ -2 & \alpha & 1 & 0 \end{array}\right]\right) &= r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha+6 & 1 & 2\beta \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+6 & 1 & 2\beta \end{array}\right]\right) = \\ &= r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2\alpha-13 & 0 & 3-4\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+6 & 1 & 2\beta \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2\alpha+13 & 0 & 4\beta-3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\right) \end{aligned}$$

Most esetekre bontással megkapjuk a végeredményt. Ha $\alpha \neq -\frac{13}{2}$, akkor $4\beta-3$ kinullázható, és $r(A) = r(A_b) = 3$. Tehát ebben az esetben pontosan egy megoldás van. Ha $\alpha = -\frac{13}{2}$ és $\beta \neq \frac{3}{4}$, akkor $r(A) = 2 < r(A_b) = 3$, tehát nem létezik megoldás. Ha $\alpha = -\frac{13}{2}$ és $\beta = \frac{3}{4}$, akkor $r(A) = r(A_b) = 2$, tehát végtelen sok megoldás van (egy szabad paraméterrel).

6th Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ \alpha & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ \beta \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Hogyan válasszuk meg az α és β paraméterek értékét úgy, hogy az $A\vec{x} = \vec{b}$ egyenletnek egyértelmű megoldása legyen; végtelen sok megoldása legyen; illetve ne legyen megoldása?

Megoldás. Az előző feladat módszerét alkalmazzuk.

$$\begin{aligned} r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 8 \\ \alpha & 2 & 1 & \beta \end{array}\right]\right) &= r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 8 \\ \alpha-1 & 0 & -4 & \beta \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ \alpha-1 & 0 & -4 & \beta \end{array}\right]\right) = \\ &= r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ \alpha+3 & 0 & 0 & \beta-8 \end{array}\right]\right) = r\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha+3 & 0 & 0 & \beta-8 \end{array}\right]\right) = \end{aligned}$$

Most, ha $\alpha \neq -3$, akkor az A együttható- és az A_b kibővített mátrixok rangjaira $r(A) = r(A_b) = 3$, tehát egyértelműen létezik megoldás. Ha $\alpha = -3$ és $\beta \neq 8$, akkor $r(A) = 2 < r(A_b) = 3$, azaz nincs megoldás. Ha $\alpha = -3$ és $\beta = 8$, akkor $r(A) = r(A_b) = 2$, vagyis végtelen sok megoldás van.

2. Lássuk be, hogy $\mathbb{R}^2$ -ben bázist alkot a $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektorpár. Állítsuk elő e két vektor lineáris kombinációjaként a következő vektorokat:

a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Megoldás. Oldjuk meg az

$$a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletet, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Átalakítva a

$$\left. \begin{aligned} 2a + b &= 0 \\ 3a + 2b &= 0 \end{aligned} \right\}$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk, melynek egyetlen megoldása $a = b = 0$. Tehát a vektorrendszer lineárisan független. Megmutatjuk, hogy generátorrendszer is. Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektor felírható

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

alakban alkalmas $a, b \in \mathbb{R}$ választása esetén. Az előző vektoregyenlethez hasonlóan megoldva ebből az $a = 2x - y$ és $b = 2y - 3x$ megoldást kapjuk. Tehát tetszőleges $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektor előáll a megadott vektorok lineáris kombinációjaként, méghozzá a

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2x - y) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (2y - 3x) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

módon. Tehát a két megadott vektor egy bázist alkot. Megjegyezzük, hogy az előző feladat alapján $\mathbb{R}^2$ egy 2-dimenziós valós vektortér, tehát tetszőleges 2 lineárisan független vektor egy bázis, így a második számolás a fenti érv használata mellett elhagyható. Így viszont a további rész megoldása egyszerű helyettesítéssel adódik.

a)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = (2 \cdot 9 - 4) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (2 \cdot 4 - 3 \cdot 9) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 14 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 19 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel a megadott vektorok koordinátáit a $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ bázisban!

a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

Megoldás. A feladatunk felírni a megadott vektorokat a bázisvektorok lineáris kombinációjaként; a kért koordináták a bázisvektorok együtthatói. Így az előző feladathoz hasonlóan kaphatóak meg a megoldások.

a)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

tehát a koordináták $0, 0, 0$.

b)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

azaz a koordináták $3, 4, 2$.

c)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = -20 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 31 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - 12 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

a koordináták $-20, -31, -12$.

4. Egy vektortérben $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineárisan független vektorok. Lineárisan független-e az $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}), (\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}), (\vec{a} + 4\vec{b} + 5\vec{c})$ rendszer?

Megoldás. Oldjuk meg az $\alpha(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \beta(\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}) + \gamma(\vec{a} + 4\vec{b} + 5\vec{c}) = \vec{0}$ vektoregyenletet. Átalakítva ebből az $(\alpha + \beta + \gamma)\vec{a} + (\alpha + 2\beta + 4\gamma)\vec{b} + (\alpha + 3\beta + 5\gamma)\vec{c} = \vec{0}$ egyenletet kapjuk. Mivel $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ lineárisan függetlenek, ez csak akkor teljesülhet, ha mindhárom együttható nulla. Azaz az alábbi lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma &= 0 \\ \alpha + 3\beta + 5\gamma &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Ennek egyetlen megoldása $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tehát a megadott három vektor lineárisan független.

5. Végezzük el az összes lehetséges szorzást A, B, C, A^T, B^T, C^T között!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Két mátrixot pontosan akkor tudunk összeszorozni, ha az első oszlopainak száma megegyezik a második sorainak számával. Így jelen esetben tizenkettő szorzat létezik: $AB, A^T C, B C^T, B^T A^T, C B^T, C^T A$, valamint A, B és C szorzata a saját transzponáltjával tetszőleges sorrendben. A szorzatok:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 3 + 2 \cdot (-6) & 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-6) & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -10 & -18 & 5 \\ -15 & 8 & 27 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -10 & 17 & -20 \\ 8 & -12 & -2 & 4 \\ -17 & 22 & -15 & 16 \end{bmatrix}$$

$$B C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -6 \\ 3 & 7 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -18 \\ 15 & -21 \\ -31 & -33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
B^T A^T &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -10 & 8 \\ -18 & 27 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \\
CB^T &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 15 & -31 \\ -18 & -21 & -33 \end{bmatrix} \\
C^T A &= \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -6 \\ 3 & 7 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -17 \\ -10 & -12 & 22 \\ 17 & -2 & -15 \\ -20 & 4 & 16 \end{bmatrix} \\
AA^T &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 14 \end{bmatrix} \\
A^T A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -1 & 10 & -9 \\ -4 & -9 & 13 \end{bmatrix} \\
BB^T &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 19 & -5 \\ 19 & 30 & -26 \\ -5 & -26 & 65 \end{bmatrix} \\
B^T B &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & -6 & -33 & 12 \\ -6 & 20 & 18 & 12 \\ -33 & 18 & 54 & 3 \\ 12 & 12 & 3 & 21 \end{bmatrix} \\
CC^T &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -6 \\ 3 & 7 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 36 \\ 36 & 174 \end{bmatrix} \\
C^T C &= \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -6 \\ 3 & 7 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & -32 & 32 & -36 \\ -32 & 40 & -36 & 40 \\ 32 & -36 & 58 & -68 \\ -36 & 40 & -68 & 80 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

6. Számoljuk ki a következő mátrixok determinánsát:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{e) } \begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. a) A tanult képlet alapján: $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = 9$.

b) A kifejtési tételt alkalmazzuk a harmadik sorra:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = +0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 18$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = \sin \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

d) A Sarrus-szabály alapján:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 11 + 2 \cdot 7 \cdot 9 + 3 \cdot 5 \cdot 10 - 1 \cdot 7 \cdot 10 - 2 \cdot 5 \cdot 11 - 3 \cdot 6 \cdot 9 = 0.$$

e) Most sor- és oszlopműveleteket végzünk:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ -11 & -2 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -11 & -2 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -13 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -13 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ & = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

1. Számítsuk ki a megadott mátrix rangját $\lambda \in \mathbb{R}$ függvényében!

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A tanult módon sor- és oszlopműveleteket alkalmazunk.

$$r(A) = r \left(\begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \right) = r \left(\begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \right)$$

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $\lambda = 1$. Ekkor behelyettesítve a kapott mátrixba:

$$r(A) = r \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right), \text{ amiből } r(A) = 1.$$

Tegyük fel most, hogy $\lambda \neq 1$. Ekkor a kapott mátrix első és harmadik sorát eloszthatjuk $(1-\lambda)$ -val:

$$\begin{aligned} r(A) &= r \left(\begin{bmatrix} 0 & 1+\lambda & 1 & 1+\lambda \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = r \left(\begin{bmatrix} 0 & 2+\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = \\ &= r \left(\begin{bmatrix} 0 & 2+\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = r \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3. \end{aligned}$$

2. Állapítsuk meg, hogy a megadott egyenletrendszereknek hány megoldása van az u, v valós paraméterek függvényében!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - ux_2 = 2 \\ x_1 + vx_2 = 2 \end{array} \right\} \quad \text{b)} & \left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = v \\ -x_1 + ux_2 + x_3 = 3 \end{array} \right\} \end{array}$$

Megoldás. Mindkét esetben az A együttható és az A_b kibővített mátrix rangját fogjuk kiszámolni.

a)

$$r \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -u & 2 \\ 1 & v & 2 \end{bmatrix} \right) = r \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -u-2 & 1 \\ 0 & v-2 & 1 \end{bmatrix} \right) = r \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -u-2 & 1 \\ 0 & v-2 & 1 \end{bmatrix} \right) = r \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -u-2 & 1 \\ 0 & u+v & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Ha $u+v \neq 0$, akkor $(u+v)$ -t használva kinullázható a második oszlop, amiből $r(A_b) = 3$ és $r(A) = 2$ adódik, azaz ekkor nincs megoldás. Tegyük fel, hogy $u+v=0$, azaz $u=-v$. Ekkor, ha $u=-2$ (és így $v=2$), akkor $r(A) = 1 < r(A_b) = 2$, azaz nincs megoldás. Ha $-v=u \neq -2$, akkor $r(A) = r(A_b) = 2$, tehát, mivel az ismeretlenek száma 2, egyetlen megoldás van.

b)

$$\begin{aligned} r \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & v \\ -1 & u & 1 & 3 \end{bmatrix} \right) &= r \left(\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & v-3 \\ 0 & u+2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right) = r \left(\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & v-3 \\ 0 & u+2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right) = \\ &= r \left(\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v-1 \\ 0 & u+2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right) = r \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v-1 \\ 0 & u+2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Látható, hogy ha $v \neq 1$ vagy $u = -2$, akkor $r(A) < r(A_b)$, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása. Legyen most $v = 1$ és $u \neq -2$. Ekkor az utolsó oszlop $(u+2)$ segítségével kinullázható, tehát $r(A) = r(A_b) = 3$, azaz az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.

3. A Cramer-szabály segítségével számoljuk ki a megadott egyenletrendszerben a megadott ismeretlen értékét!

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{array} \right\}, x_4 = ? \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5 \end{array} \right\}, x_1 = ?$$

Megoldás. a) Az együtthatómátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 1 \\ 0 & -4 & -10 & 8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 1 \\ 0 & 36 & 54 & 0 \\ 0 & 18 & 36 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 1 \\ 0 & 36 & 54 & 0 \\ 0 & 18 & 36 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 18 & 36 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 18 \cdot (-18) = 324$$

Kicsérélve a negyedik oszlopot a konstansok vektorára, a kapott determináns hasonlóan kiszámolható:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -648.$$

Ebből a Cramer-szabály alapján $x_4 = \frac{-648}{324} = -2$.

b) Most

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 98$$

és

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 98,$$

amiből $x_1 = \frac{98}{98} = 1$.

4. Vizsgálja meg, hogy a megadott transzformáció lineáris-e, és ha igen, írja fel a mátrixát $\mathbb{R}^2$ megadott bázisában!

a) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x+y \\ 5x-2y \end{bmatrix}$, a szokásos bázisban

b) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x+y \\ 5x-2y \end{bmatrix}$, az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázisban.

c) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x+y+1 \\ 5x-2y \end{bmatrix}$, a szokásos bázisban

Megoldás. a) Mivel

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ 5(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + y_1 \\ 5x_1 - 2y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_2 + y_2 \\ 5x_2 - 2y_2 \end{bmatrix} =$$

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right),$$

$$\text{és } L\left(\begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(\lambda x) + \lambda y \\ 5(\lambda x) - 2(\lambda y) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3x + y \\ 5x - 2y \end{bmatrix} = \lambda L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right),$$

a transzformáció lineáris. Mivel egy L lineáris transzformáció mátrixa a $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ bázisban az az M mátrix, melynek oszlopvektorai rendre $[L(\vec{b}_1)]_B, [L(\vec{b}_2)]_B, \dots, [L(\vec{b}_n)]_B$, így

M felírásához azt kell megvizsgálnunk, hogy mik lesznek $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ és $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ koordinátái

a szokásos bázisban. Most $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ és $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Ezen vektorok

koordinátái éppen a vektorok szokásos bázisbeli koordinátái, így $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$.

b) A transzformáció megegyezik az előző feladatbeli transzformációval, tehát lineáris. A feladatunk, hogy $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ és $L\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \end{bmatrix}$ koordinátáit kiszámoljuk

a megadott bázisban. A szokásos számolással az adódik, hogy $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, és

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -7 \end{bmatrix} = -\frac{9}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Tehát } M = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

c) Mivel $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, a transzformáció nem lineáris (pl. a második vizsgált azonosság nem teljesül a nullvektorra tetszőleges skalár esetén).

5. Írja fel a megadott lineáris transzformációk mátrixát a sík/tér szokásos bázisában!

a) a sík origó körüli forgatása α szöggel pozitív forgásirányban

b) az origón átmenő, $\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú síkra vett merőleges vetítés

c) az origón átmenő, $\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ normálvektorú síkra vett tükrözés

d) az $x = y = z$ egyenes körüli, 120° -os forgatás, a pozitív ortáns felől nézve pozitív forgásirányban

Megoldás. Az előző feladat alapján azt kell kiszámolnunk, hogy a szokásos bázis vektorait a megadott lineáris transzformációk melyik vektorokba viszik.

a) Az origó körüli α szögű elforgatás után $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ képe $\begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$, és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ képe $\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + 90^\circ) \\ \cos(\alpha + 90^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$. Tehát a forgatás mátrixa:

$$M = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

b) Idézzük fel, hogy a $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ -val párhuzamos és rá merőleges komponensei rendre

$\vec{b}_{\parallel} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$ és $\vec{b}_{\perp} = \vec{b} - \vec{b}_{\parallel}$. Másrészt, az $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ helyvektorú pont vetületének helyvektora

éppen $\vec{r} \cdot \vec{n}$ -re merőleges vetülete. Így alkalmazva a tanult képletet, a vetület helyvektora

$$\begin{bmatrix} x - A \cdot \frac{Ax+By+Cz}{A^2+B^2+C^2} \\ y - B \cdot \frac{Ax+By+Cz}{A^2+B^2+C^2} \\ z - C \cdot \frac{Ax+By+Cz}{A^2+B^2+C^2} \end{bmatrix}.$$

A képletet felírva a szokásos bázis vektoraira, a vetítés mátrixára

$$M = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} \begin{bmatrix} B^2 + C^2 & -AB & -AC \\ -AB & A^2 + C^2 & -BC \\ -AC & -BC & A^2 + B^2 \end{bmatrix}$$

adódik.

c) A b) részhez hasonló gondolatmenettel

$$M = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} \begin{bmatrix} B^2 + C^2 - A^2 & -2AB & -2AC \\ -2AB & A^2 + C^2 - B^2 & -2BC \\ -2AC & -2BC & A^2 + B^2 - C^2 \end{bmatrix}$$

d) A $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázisvektorok képei az elforgatás után rendre $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Tehát a transzformáció mátrixa:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.^h Egy A négyzetes mátrix *ortogonális*, ha $A^{-1} = A^T$, és *idempotens*, ha $A^2 = A$. Igazoljuk, hogy ha A ortogonális, akkor $\det(A) = \pm 1$, és ha idempotens, akkor $\det(A) = 0$ vagy 1 !

Megoldás. A determinánsok szorzástétele alapján $\det(E_n) = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A)$, azaz $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ minden A invertálható mátrixra. Másrészt az előadáson elhangzottak alapján $\det(A^T) = \det(A)$. Tehát ha A ortogonális, akkor $\det(A) = \frac{1}{\det(A)}$, amiből az állítás elemi átalakításokkal következik. Hasonlóan, ha A idempotens, $\det(A) = \det(A^2) = (\det(A))^2$, melynek megoldásai $\det(A) = 0$ és $\det(A) = 1$.

1. Határozzuk meg a sajátértékeket, sajátvektorokat!

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. a) Az A ($n \times n$)-es mátrix λ sajátértékei a $\det(A - \lambda E_n) = 0$ egyenlet megoldásai. Oldjuk meg ezt az egyenletet a fenti mátrixra:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot (5-\lambda) - 2 \cdot 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 6.$$

A kapott másodfokú polinom gyökei $\lambda_1 = 6$ és $\lambda_2 = 1$.

A λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az $(A - \lambda E_n)\vec{v} = \vec{0}$ egyenlet nemnulla megoldásai $\vec{v}$ -re.

Megoldjuk a fenti egyenletet mindkét sajátértékre. A $\lambda_1 = 6$ -hoz tartozó sajátvektorok a

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x + 2y \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektoregyenlet nemnulla megoldásai, melyek tekinthetők a hozzátartozó homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásainak. Az egyenletrendszer megoldását az $A - \lambda_1 E_2$ együtthatómátrixon végrehajtott Gauss-elimináció alkalmazásával is megkereshetjük.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Az ennek megfelelő egyenletrendszer megoldása $2x - y = 0$, azaz $y = 2x$, ahol $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Tehát a $\lambda_1 = 6$ -hoz tartozó sajátvektorok: $\vec{v}_1 = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, ahol $x \neq 0$ tetszőleges. Hasonlóan kaphatóak $\lambda_2 = 1$ -hez tartozó sajátvektorok: $\vec{v}_2 = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, ahol $y \neq 0$ tetszőleges.

b) Az a) rész módszerét alkalmazzuk. Most a sajátértékek a $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 2-\lambda & -3 \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda = 0$ egyenlet megoldásai, melyek $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. A $\lambda_1 = 0$ -hoz tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_1 = z \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, $z \neq 0$ alakú vektorok. A $\lambda_2 = 1$ -hez tartozó sajátvektorok a

$\vec{v}_2 = x \begin{bmatrix} 1 \\ -14 \\ -6 \end{bmatrix}$, $x \neq 0$ alakú vektorok. A $\lambda_3 = -1$ -hez tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_3 = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y \neq 0$ alakú vektorok.

c) Az előzőhöz hasonlóan $\det(A - \lambda E_3) = (1-\lambda) \cdot (4-\lambda) \cdot (1-\lambda)$, melynek megoldásai $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 4$. A $\lambda_1 = 1$ -hez tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_1 = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x \neq 0$ vektorok. A $\lambda_2 = 4$ -hez

tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_2 = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x \neq 0$ vektorok.

d) Most $\det(A - \lambda E_3) = (3-\lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 2)$, melynek gyökei $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = -1$.

A $\lambda_1 = 3$ -hoz tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_1 = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $y \neq 0$ vektorok. A $\lambda_2 = 2$ -höz tartozó

sajátvektorok a $\vec{v}_2 = z \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $z \neq 0$ vektorok. A $\lambda_3 = -1$ -hez tartozó sajátvektorok az

$\vec{v}_3 = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $y \neq 0$ vektorok.

2. Tudjuk, hogy az $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az a paraméter értékét, a sajátértékeket, és a másik sajátvektort!

Megoldás. Szorozzuk össze a mátrixot és a vektort:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ a+1 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\vec{v}$ sajátvektor, a végeredmény $\vec{v}$ skalárszorosa, azaz a megfelelő koordinátáik aránya állandó. Tehát: $6 = a + 1$, amiből $a = 5$, és a hozzátartozó sajátérték $\lambda_1 = 6$. Helyettesítsünk vissza A -ba $a = 5$ -t. és alkalmazzuk az előző feladat módszerét. Most $\det(A - \lambda E_2) = \lambda^2 - 2\lambda - 24$, melynek gyökei $\lambda_1 = 6$ (ahogy láttuk már), és $\lambda_2 = -4$. A λ_1 -hez tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_1 = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x \neq 0$ vektorok. A λ_2 -höz tartozó sajátvektorok a $\vec{v}_2 = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $x \neq 0$ vektorok.

1. Számoljuk ki a következő határértékeket:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy+3}{x^2y+4} & \text{b)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x}{\cos y} & \text{c)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2 \cos y^2} \\ \text{d)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\sin xy}{x} & \text{e)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arctg(xy) \cdot \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{f)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y} \\ \text{g)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{2x^2+2y^2} & \text{h)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy^3}{2x^2+2y^2} & \text{i)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{2x^2+3y^2} \\ \text{j)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2+5y^2}{2x^2+y^2} & \text{k)} \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-2)} \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} & \text{l)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+xy-y}{x+xy+y} \end{array}$$

Megoldás. a) A megadott függvény folytonos $(0,0)$ -ban, így $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy+3}{x^2y+4} = \frac{0+3}{0+4} = \frac{3}{4}$.

b) Hasonlóan adódik, hogy $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x}{\cos y} = \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0$.

c) Vegyük észre, hogy ha $(x,y) \rightarrow (0,0)$, akkor $(x^2y) \rightarrow 0$, tehát $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Másképp, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\cos y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\cos y^2} = 0$. Tehát $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2 \cos y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2y} \cdot \frac{y}{\cos y^2} = 0$.

d) Mivel $(x,y) \rightarrow (0,3)$ esetén $xy \rightarrow 0$, most $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$ alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = 1 \cdot 3 = 3.$$

e) Vegyük észre, hogy tetszőleges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén $\left| \sin \frac{1}{x^2+y^2} \right| \leq 1$. Másrészt, mivel az $\arctg(xy)$ függvény mindenhol folytonos, így $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arctg(xy) = 0$. Így az

$\left| \arctg(xy) \cdot \sin \frac{1}{x^2+y^2} \right| \leq |\arctg(xy)|$ egyenlőtlenség és a rendőr-elv alkalmazásával az adódik, hogy $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arctg(xy) \cdot \sin \frac{1}{x^2+y^2} = 0$.

f) Teszteljük, hogy ha különböző útvonalon közelítjük meg az (x,y) ponttal az origót, akkor a függvényértékek határértéke ugyanaz lesz-e.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

és

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y}.$$

Vegyük észre, hogy $\lim_{y \rightarrow 0+0} \frac{1}{y} = \infty$ és $\lim_{y \rightarrow 0-0} \frac{1}{y} = -\infty$, tehát nem létezik a kétváltozós határérték.

g) Most

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{2x^2+2y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{2x^2+2y^2} = 0,$$

tehát lehet, hogy létezik a határérték. Közelítsük meg az origót az $y = mx$ egyenes mentén. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (mx)}{2x^2 + 2(mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{2 + 2m^2} = \frac{m}{2 + 2m^2}.$$

Mivel a végeredmény nem független m értékétől, a határérték nem létezik.

h) Az előző feladathoz hasonló módszert alkalmazunk:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3xy^3}{2x^2+2y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3xy^3}{2x^2+2y^2} = 0,$$

azaz lehet, hogy létezik a határérték, melynek értéke 0. Az $y = mx$ megfeleltetésnél:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3m^3 x^4}{2x^2 + 2m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3m^3 x^2}{2 + 2m^2} = 0,$$

azaz továbbra is lehet, hogy létezik a határérték. Ellenőrizzük, hogy tényleg létezik-e a határérték. Minthogy

$$\left| \frac{3xy^3}{2x^2 + 2y^2} \right| = \left| \frac{3xy}{2} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{3xy}{2} \right|,$$

ami tart nullához, ha $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ (azaz ha $xy \rightarrow 0$). Tehát a rendőr-elv alapján a határérték létezik, és értéke 0.

i) Most az $\left| \frac{xy^2}{2x^2 + 3y^2} \right| \leq |x|$ becslés alkalmazásával adódik, hogy a határérték létezik, és értéke 0.

j) Ebben az esetben:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2},$$

és

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^2}{y^2} = 5,$$

tehát nem létezik a határérték.

k) Alkalmas átalakításokkal

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-2)} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-2)} \frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-2)} \frac{x+y}{x-y} = \frac{2-2}{2+2} = 0,$$

tehát a határérték létezik, és értéke 0.

l) A j) feladat megoldásához hasonlóan adódik, hogy a határérték nem létezik.

2. Legyen $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 y^2}{4x^4 + 7y^4}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$. Mely pontokban folytonos f ?

Megoldás. Az origó kivételével f folytonos. Számoljuk ki a határértékét, az origóban. Ha $y = mx$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 (mx)^2}{4x^4 + 7(mx)^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3m^2 x^4}{x^4 (4 + 7m^4)} = \frac{3m^2}{4 + 7m^4}.$$

Mivel a végeredmény függ m értékétől, f -nek nem létezik $(0, 0)$ -ban határértéke, tehát itt nem is folytonos.

3. Legyen $f(x, y) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ c, & \text{egyébként} \end{cases}$. Adjuk meg c értékét úgy, hogy f minden pontban folytonos legyen!

Megoldás. A függvény az origó kivételével minden pontban folytonos. Az origóban pontosan akkor folytonos, ha itt van határértéke, és ez megegyezik c értékével. Számoljuk ki a függvény határértékét a $(0, 0)$ pontban. Vegyük észre, hogy ha $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, akkor $x^2 + y^2 \rightarrow 0$, így az $x^2 + y^2 > 0$ egyenlőtlenség miatt ekkor $\frac{1}{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$. Mivel $\lim_{t \rightarrow \infty} \arctg t = \frac{\pi}{2}$, azt kapjuk, hogy $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{\pi}{2}$, és a függvény $c = \frac{\pi}{2}$ esetén lesz folytonos.

4. További gyakorló feladatok:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x^3-y} = ? & \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{y(x+y)} = ? & \text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{e^{x^2-3y}}{1+2x^2+3y^2} = ? \\ \text{d) } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{1}{x-y} = ? & \text{e) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x+3y}{2x+8y} = ? & \text{f) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (3x^2+4y^2) \arctg \frac{x}{y} = ? \\ \text{g) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin 2y}{x^2+y^2} = ? & \text{h) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin 2y}{2x^2+5y^2} = ? & \text{i) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^3}{2x^8+y^8} = ? \end{array}$$

Megoldás. a) Először megvizsgáljuk, hogy létezik-e a határérték.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x^3-y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{-y} = 1.$$

Másrészt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x^3-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} = \infty.$$

A kapott értékek különböznek, így nem létezik a határérték.

b) Az $y = mx$ egyenes mentén vizsgálva

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{mx(x+mx)} = \frac{1}{m(1+m)}.$$

A végeredmény m -től függ, így nem létezik a határérték.

c) A megadott függvény folytonos $(2,1)$ -ben így $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{e^{x^2-3y}}{1+2x^2+3y^2} = \frac{e^1}{12} = \frac{e}{12}$.

d) Most $\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$. Minthogy ennek a függvénynek a baloldali határértéke ∞ , jobboldali határértéke $-\infty$, a kétváltozós határérték nem létezik.

e) Az a) feladat megoldásához hasonlóan levezethető, hogy a határérték nem létezik.

f) Vegyük észre, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $|\arctg t| \leq \frac{\pi}{2}$. Tehát $\left| (3x^2+4y^2) \arctg \frac{x}{y} \right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot |(3x^2+4y^2)|$. Minthogy $(x,y) \rightarrow (0,0)$ esetén $3x^2+4y^2 \rightarrow 0$, a rendőr-elv alapján a határérték létezik, és értéke 0.

g) Most alkalmazhatjuk a $\left| \frac{x^2 \sin 2y}{x^2+y^2} \right| \leq |\sin 2y|$ becslést. A rendőr-elv alapján a határérték létezik, és értéke 0.

h) A g) rész gondolatmenetével ugyanazt az eredményt kapjuk.

i) Az origót az $y = mx$ egyenes mentén közelítve

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 \cdot m^3 x^3}{2x^8 + m^8 x^8} = \frac{m^5}{2+m^8}.$$

A végeredmény függ m -től, így a határérték nem létezik.

5. Legyen $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+x^2y+y^2}{x^4+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$. Mutassuk meg, hogy az origón átmenő bármely egyenes mentén felvéve egy origóhoz tartó pontsorozatot, az ezekhez tartozó függvényértékek sorozatának mindig ugyanaz a határértéke. Vizsgáljuk meg a függvényértékek sorozatának határértékét akkor is, ha az $y = x^2$ egyenletű parabolán közelítünk az origóhoz. Van-e a függvénynek határértéke az origóban?

Megoldás. Ha a pontsorozat elemei rajta vannak az $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ egyenesen, akkor

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^2 \cdot mx + (mx)^2}{x^4 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot mx + m^2}{x^2 + m^2} = 1,$$

ami független m -től. Másrészt, ha a pontok az egyetlen, a fenti formában fel nem írható $x = 0$ egyenesen vannak, akkor:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^4 + 0^2 \cdot y + y^2}{0^4 + y^2} = 1.$$

Ezzel igazoltuk az első állítást. Ha a pontsorozat elemei az $y = x^2$ parabolán vannak, akkor

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^2 \cdot x^2 + (x^2)^2}{x^4 + (x^2)^2} = \frac{3}{2} \neq 1.$$

Tehát az átviteli-elv alapján a függvénynek nincs határértéke $(0,0)$ -ban.

1. Számoljuk ki a következő függvények parciális deriváltjait!

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{x^2 e^{x+y^2}}{2x^2 + 1} + \ln(x^4 + 1) + (2y + 1)^6 \quad \text{b) } f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2x - 5y + \ln 2$$

Megoldás. a)

$$f'_x(x, y) = \frac{(2xe^{x+y^2} + x^2 e^{x+y^2})(2x^2 + 1) - 4x \cdot x^2 e^{x+y^2}}{(2x^2 + 1)^2} + \frac{4x^3}{x^4 + 1},$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x^2 e^{x+y^2} \cdot 2y}{2x^2 + 1} + 6(2y + 1)^5 \cdot 2.$$

b)

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2, \quad f'_y(x, y) = -6xy - 5.$$

2. Legyen $f(x, y) = \sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}$. Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket! (Az $(1, 0)$ pontban használjuk a definíciót.)

Megoldás. Legyen $(x, y) \neq (1, 0)$. Ekkor az egyváltozós deriválási szabályok alapján:

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2} (5(x-1)^4 + 4y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 20(x-1)^3, \quad f'_y(x, y) = \frac{1}{2} (5(x-1)^4 + 4y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8y.$$

Látható, hogy az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvényre vonatkozó szabály miatt az $(x, y) = (1, 0)$ pontban nem alkalmazhatjuk ezt a megoldási módszert. Így az egyváltozós függvény deriváltjának definícióját alkalmazzuk:

$$f'_x(1, 0) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x, 0) - f(1, 0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5(x-1)^4} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5}(x-1)^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{5}(x-1) = 0;$$

$$f'_y(1, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(1, y) - f(1, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4y^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2|y|}{y}.$$

Ez a határérték (és így a megfelelő parciális derivált) nem létezik, pontosabban $\lim_{y \rightarrow 0+0} \frac{2|y|}{y} = 2$ és $\lim_{y \rightarrow 0-0} \frac{2|y|}{y} = -2$.

3. Legyen $f(x, y) = (2x - y)^4 + 4x^3 - 8y^2$. Számoljuk ki az első és másodrendű parciális deriváltakat! Hol deriválható (totálisan) a függvény? Mivel egyenlő $\text{grad } f(1, 2)$?

Megoldás.

$$f'_x(x, y) = 4(2x-y)^3 \cdot 2 + 12x^2; \quad f'_y(x, y) = -4(2x-y)^3 - 16y; \quad f''_{xx}(x, y) = 48(2x-y)^2 + 24x;$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx} = -24(2x-y)^2; \quad f''_{yy}(x, y) = 12(2x-y)^2 - 16.$$

Mivel az elsőrendű parciális deriváltak minden pontban folytonosak, így a függvény mindenhol totálisan deriválható.

$$(\text{grad } f)(1, 2) = (f'_x(1, 2), f'_y(1, 2)) = (12, -32).$$

4. Legyen $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-2)y^2}{x^2+y^2} + 6x + 3y, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$ Mivel egyenlő $f'_x(x, y)$ és $f'_y(x, y)$?
Hol differenciálható (totálisan) f ?

Megoldás. Ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor

$$f'_x(x, y) = \frac{y^2 \cdot (x^2 + y^2) - (x - 2)y^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} + 6,$$

$$f'_y(x, y) = \frac{2y(x - 2) \cdot (x^2 + y^2) - (x - 2)y^2 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} + 3.$$

A $(0, 0)$ pontban a definíciót használjuk:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 0}{x - 0} = 6; \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(-2 + 3y) - 0}{y - 0},$$

ahol az utóbbi határérték nem létezik. Látható, hogy f parciális deriváltjai minden $(x, y) \neq (0, 0)$ pontban folytonosak, így ezekben a pontokban f totálisan deriválható. Másrészt a $(0, 0)$ pontban még y szerint sem deriválható, így nem totálisan deriválható.

5. Legyen $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2 + 2x^2)}{\sqrt{y^2 + 2x^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = ?$ Folytonos-e f az origóban?
- $f'_x(0, 0) = ?$ (Használjuk a definíciót!)
- Totálisan deriválható-e f az origóban?

Megoldás. a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(y^2 + 2x^2)}{\sqrt{y^2 + 2x^2}} \cdot \sqrt{y^2 + 2x^2}$. Vegyük észre, hogy ha $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, akkor $y^2 + 2x^2 \rightarrow 0$. Így alkalmazhatjuk a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határértéket, ami alapján $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1 \cdot 0 = 0 = f(0, 0)$, tehát f folytonos $(0, 0)$ -ban.

b) $f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(2x^2)}{\sqrt{2x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{2x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}|x|}{x}$. Mivel az első tényezőnek a határértéke 1, a második tényezőnek nincs határértéke, így a parciális derivált nem létezik.

c) Az előző észrevétel miatt a függvény nem totálisan deriválható az origóban.

6. Adott az $f(x, y, z) = x^3 + y^4 + x^2ye^{2z}$ függvény. Mivel egyenlő $\text{grad } f(-1, 1, 0)$? Miért létezik? $f'''_{xxx} = ?$ $f'''_{xxz} = ?$

Megoldás. A parciális deriváltak $f'_x(x, y, z) = 3x^2 + 2xye^{2z}$, $f'_y(x, y, z) = 4y^3 + x^2e^{2z}$, $f'_z(x, y, z) = x^2y \cdot 2e^{2z}$. Mivel ezek léteznek a $(-1, 1, 0)$ pontban, f -nek létezik a gradiense is ebben a pontban. A definíció alapján: $(\text{grad } f)(-1, 1, 0) = (f'_x(-1, 1, 0), f'_y(-1, 1, 0), f'_z(-1, 1, 0)) = (1, 5, 2)$. A parciális deriválás definíciója alapján: $f'''_{xxx}(x, y, z) = f'''_{xxz}(x, y, z) = 4ye^{2z}$.

7. Írjuk fel az $f(x, y) = (2x - y)^2 + 4x^2 - 8y$ függvény $P_0(1, 2)$ pontbeli érintősfkjának egyenletét!

Megoldás. A $z = f(x, y)$ függvény felírható, mint az $f(x, y) - z = 0$ egyenlettel adott $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ függvény egy szintfelülete. A tanultak szerint az érintősfk egy normálvektora $\text{grad } F$ értéke a megadott $(1, 2, f(1, 2)) = (1, 2, -12)$ pontban. A gradiens $\text{grad } F = (16x - 4y, -4x + 2y - 8, -1)$, ami a megadott pontban $\vec{N} = (\text{grad } F)(1, 2, -12) = (8, -8, -1)$. Így az érintősfk egyenlete $8(x - 1) - 8(y - 2) - (z + 12) = 0$, azaz $8x - 8y - z = 4$.

8. Írjuk fel az $f(x, y, z) = x^2y + yz - 5z^2$ függvény gradiensét! Miért létezik a gradiens? Számítsuk ki az f függvény $P_0(0, 10, 1)$ pontbeli $\vec{v} = (-3, 4, 0)$ irányú deriváltját!

Megoldás. A gradiens $\text{grad} f = (2xy, x^2 + z, y - 10z)$; azért létezik, mert a függvénynek minden pontban léteznek a parciális deriváltjai. Látható, hogy f parciális deriváltjai minden pontban folytonosak is, így f totálisan deriválható is minden pontban. Így az iránymenti derivált kiszámítására alkalmazható a tanult képlet. Először keressük meg a megadott irányú egységvektort: $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-3, 4, 0)}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$. Kell a gradiens értéke a megadott pontban: $(\text{grad} f)(0, 10, 1) = (0, 1, 0)$. Az iránymenti derivált értéke $(\text{grad} f)(0, 10, 1) \cdot \vec{e} = \frac{4}{5}$.

9. Adott az $f(x, y) = 3y + e^{xy^2} - 2y \arctg \frac{x}{y}$ függvény és a $P_0(0, 1)$ pont.
- $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$, ha $y \neq 0$.
 - Írjuk fel az f függvény P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét!
 - Mennyi az f függvény P_0 pontbeli $\vec{v} = (2, -7)$ irányú deriváltja?
 - Adjuk meg az f függvény P_0 pontbeli iránymenti deriváltjának maximumát (minimumát), és adjuk meg a maximumhoz (minimumhoz) tartozó irányt.

Megoldás. a) $f'_x(x, y) = y^2 e^{xy^2} - 2y \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y} = y^2 e^{xy^2} - \frac{2y^2}{x^2+y^2}$, és $f'_y(x, y) = 3 + 2xye^{xy^2} - 2 \arctg \frac{x}{y} - 2y \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot (-\frac{x}{y^2}) = 3 + 2xye^{xy^2} - 2 \arctg \frac{x}{y} + \frac{2xy}{x^2+y^2}$. b) Az előző feladat eredménye alapján $f'_x(0, 1) = -1$, és $f'_y(0, 1) = 3$. Másrészt $f(0, 1) = 4$. Tehát az érintősíki: $-(x - 0) + 3(y - 1) - (z - 4) = 0$, azaz $x - 3y + z = 1$. c) A P_0 pontban f parciális deriváltjai folytonosak, tehát itt f totálisan deriválható. Így alkalmazható az előadáson tanult képlet. A megadott irányú egységvektor $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (\frac{2}{\sqrt{53}}, \frac{-7}{\sqrt{53}})$. A gradiens értéke a megadott pontban $(\text{grad} f)(P_0) = (-1, 3)$. Tehát az iránymenti derivált $f'_\vec{e}(0, 1) = (\text{grad} f)(0, 1) \cdot \vec{e} = \frac{-23}{\sqrt{53}}$. d) Az előadáson megbeszéltek alapján totálisan deriválható függvény esetén az iránymenti derivált értéke a gradiens irányában maximális, az azzal ellentétes irányban pedig minimális. A maximális/minimális érték pedig $|(\text{grad} f)(P_0)| = \sqrt{10}$ és $-|(\text{grad} f)(P_0)| = -\sqrt{10}$.

10. Az $f(x, y) = \frac{y^3}{e^{2x+1}}$ képlettel megadott felületre a $(-\frac{1}{2}, 1)$ pont fölött egy vízcseppet ejtünk. Merre fog elindulni? Mekkora az adott pontban a maximális meredekség?

Megoldás. A csepp arra fog elindulni, amelyik irányban a függvény értéke a legnagyobb mértékben csökken, tehát a minimális iránymenti derivált irányába. Az előadáson tanultak szerint ez éppen a függvény adott pontbeli gradiensével ellentétes irány. Számoljuk ki a gradienst: $(\text{grad} f)(x, y) = (-2y^3 e^{-2x-1}, 3y^2 e^{-2x-1})$, azaz $(\text{grad} f)(-\frac{1}{2}, 1) = (-2, 3)$. Így a csepp a $(2, -3)$ vektor által kijelölt irányban fog elindulni. Az adott pontban a maximális meredekség a gradiens abszolút értéke, ami $\sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

11. Legyen $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0); \\ -3 & \text{egyébként.} \end{cases}$
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = ?$ Folytonos-e f az origóban?
 - $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$ (Az origóban használjuk a definíciót!)
 - Mennyi az f függvény $(1, -1)$ pontbeli $\vec{v} = (-5, 1)$ irányú deriváltja?
 - Adjuk meg az f függvény $(1, -1)$ pontbeli deriváltjának maximumát és minimumát!
 - Írjuk fel az f függvény $(1, -1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

Megoldás. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. Hasonlóan $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-3y^2}{y^2} = -3$. Mivel a két határérték különböző, így f -nek nincs határértéke $(0, 0)$ -ban, tehát nem folytonos.

b) Ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor

$$f'_x(x, y) = \frac{2x(2x^2 + y^2) - 4x(x^2 - 3y^2)}{(2x^2 + y^2)^2} = \frac{14xy^2}{(2x^2 + y^2)^2}; \quad f'_y(x, y) = \frac{-14x^2y}{(2x^2 + y^2)^2}.$$

Másrészt,

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{-3y^2}{y^2} + 3}{y} = 0; \quad f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2x^2} + 3}{x},$$

ahol az utóbbi határérték nem létezik, azaz f nem deriválható x szerint a $(0, 0)$ pontban.

c) Az $(1, -1)$ pontban, a parciális deriváltak folytonossága miatt f totálisan deriválható. $\vec{e} = \left(\frac{-5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\right)$. Másrészt $(\text{grad} f)(1, -1) = \left(\frac{14}{9}, \frac{14}{9}\right)$. Így az iránymenti derivált $f'_e(1, -1) = -\frac{56}{9\sqrt{26}}$.

d) A maximum $|(\text{grad} f)(1, -1)| = \frac{14\sqrt{2}}{9}$, és a minimum $-\frac{14\sqrt{2}}{9}$.

e) Mivel $f(1, -1) = -\frac{2}{3}$, az érintő sík egyenlete $\frac{14}{9}(x-1) + \frac{14}{9}(y+1) - (z + \frac{2}{3}) = 0$, azaz $\frac{14}{9}x + \frac{14}{9}y - z = \frac{2}{3}$.