

Megoldások a többváltozós függvények és sorok témakörhöz

1. Keressük meg a következő függvények lokális szélsőértékeit!

- a) $f(x, y) = (x - 3y + 3)^2 + (x - y - 1)^2$ b) $f(x, y) = (x - y + 1)^2 - (x^2 - 2)^2$
 c) $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 - 4$ d) $f(x, y) = \frac{20}{x} + \frac{50}{y} + xy$
 e) $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

Megoldás. a) A parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = 2(x - 3y + 3) + 2(x - y - 1) = 4x - 8y + 4;$$

$$f'_y(x, y) = 2(x - 3y + 3)(-3) + 2(x - y - 1)(-1) = -8x + 20y - 16.$$

A függvény stacionárius pontjai az $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$ egyenletrendszer megoldásai. Jelen esetben az egyetlen megoldás $P_0(3, 2)$. Azt, hogy itt van-e lokális szélsőérték, a másodrendű parciális deriváltakból álló Hesse-determináns vizsgálatával döntjük el. A másodrendű deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = 4; \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -8; \quad f''_{yy}(x, y) = 20.$$

A vizsgált pontban (és minden egyéb pontban) így a Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 20 \end{vmatrix} = 4 \cdot 20 - (-8)^2 = 16 > 0,$$

tehát a függvénynek a vizsgált pontban van lokális szélsőértéke. Minthogy $f''_{xx}(3, 2) = 4 > 0$, így a szélsőérték egy lokális minimum. A minimum értéke $f(3, 2) = 0$.

b) Az elsőrendű parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = 2(x - y + 1) - 2(x^2 - 2)(2x) = -4x^3 + 10x - 2y + 2; \quad f'_y(x, y) = 2(x - y + 1)(-1) = -2x + 2y - 2.$$

Megkeressük a stacionárius pontokat. A második deriváltak egyenlővé téve 0-val $y = x + 1$ adódik. Ezt az első egyenletbe helyettesítve $-4x^3 + 8x = 0$, amiből $x = 0$, vagy $x = \pm\sqrt{2}$. Tehát a stacionárius pontok $P_1(0, 1)$, $P_2(\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1)$ és $P_3(-\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$. A másodrendű deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = -12x^2 + 10; \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -2; \quad f''_{yy}(x, y) = 2.$$

Így a Hesse determináns $D(x, y) = (-12x^2 + 10) \cdot 2 - (-2)^2 = 16 - 24x^2$. A vizsgált pontokban $D(P_1) = 16 > 0$, $D(P_2) = D(P_3) = -32 < 0$, tehát egyedül P_1 -ben van lokális szélsőérték. Mivel $f''_{xx}(0, 1) = 10 > 0$, ezért itt lokális minimum van. Ennek értéke $f(0, 1) = -4$.

c) Az elsőrendű deriváltak

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 6x + 2y; \quad f'_y(x, y) = 2x + 2y.$$

Így a stacionáris pontok $P_1(0, 0)$ és $P_2(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$. A másodrendű deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = 6x - 6; \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 2; \quad f''_{yy}(x, y) = 2,$$

így a vizsgált pontokban a Hesse-determináns $D(P_1) = -16 < 0$ és $D(P_2) = 16 > 0$, tehát egyedül a P_2 pontban van lokális szélsőérték. Most $f''_{xx}(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}) = 10 > 0$, azaz P_2 -ben lokális minimum van, melynek értéke $f(P_2) = -\frac{364}{27}$.

d) Az elsőrendű deriváltak

$$f'_x(x, y) = -20x^{-2} + y = y - \frac{20}{x^2}; \quad f'_y(x, y) = x - \frac{50}{y^2}$$

Megkeressük azokat a pontokat, ahol mindkét derivált nulla. Az $y = \frac{20}{x^2}$ kifejezést a második deriváltba behelyettesítve az $x = \frac{x^4}{8}$ egyenlet adódik. Minthogy $x = 0$ esetén $f(x, y)$ nem értelmezett, az egyetlen megoldás az $x = 2$, melyből $y = 5$. Tehát az egyetlen stacionárius pont a $P(2, 5)$. A második deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{40}{x^3}; \quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 1; \quad f''_{yy}(x, y) = \frac{100}{y^3},$$

amiből $D(2, 5) = 3 > 0$, tehát P -ben van lokális szélsőérték. Mivel $f''_{xx}(2, 5) = 5$, ez minimum, melynek értéke $f(2, 5) = 30$.

e) Az elsőrendű deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 4y - 4x^3; \quad f'_y(x, y) = 4x - 4y^3.$$

Ebből az előző feladatokhoz hasonlóan kaphatók a stacionárius pontok: $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(-1, -1)$. A másodrendű deriváltak kiszámolása után adódik a Hesse-determináns: $D(x, y) = 144x^2y^2 - 16$. Mivel $D(0, 0) = -16 < 0$, $D(1, 1) = D(-1, -1) = 128 > 0$, így P_2 -ben és P_3 -ban van lokális szélsőérték. Minthogy $f''_{xx}(1, 1) = f''_{xx}(-1, -1) = -12 < 0$, ezekben a pontokban lokális maximum van, melyek értéke $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$.

2. Keressük meg az $x^2 + y^2 + y - 1$ függvény maximumát és minimumát az $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ halmazon!

Megoldás. Vizsgáljuk meg először a lehetséges szélsőértékhelyeket a halmaz belsejében. Mivel $f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 1$ minden pontban (totálisan) deriválható, így a halmaz belsejében f csak stacionárius pontokban veheti fel a szélsőértékeit. A parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 2x; \quad f'_y(x, y) = 2y + 1,$$

melyek egyetlen zérushelye a $P_1(0, -\frac{1}{2})$ pont. Minthogy P_1 a halmaz belsejében van, P_1 egy lehetséges szélsőértékhely.

Előfordulhat, hogy egy szélsőérték a halmaz határán található. A halmaz határpontjainak koordinátáira teljesül az $x^2 = 1 - y^2$ összefüggés, ahol $-1 \leq y \leq 1$. Tehát ezekben a pontokban az f függvény értéke $g(y) = (1 - y^2) + y^2 + y - 1 = y$. Ezen egyváltozós függvénynek a $[-1, 1]$ intervallum belsejében nincs lokális szélsőértéke, globális szélsőértékei az $y = \pm 1$ helyen találhatók. Ezekben a pontokban $x = 1 - (\pm 1)^2 = 0$, tehát a határpontok közti lehetséges szélsőértékhelyek a $P_2(0, -1)$ és a $P_3(0, 1)$ pontok. Így f minimuma és maximuma a megadott halmazon az $f(P_1) = -\frac{5}{4}$, $f(P_2) = -1$ és $f(P_3) = 1$ értékek közül kerül ki. Tehát a megadott halmazon f a $P_1(0, -\frac{1}{2})$ pontban minimális és minimuma $f(P_1) = -\frac{5}{4}$, míg a $(0, 1)$ pontban maximális, és maximuma $f(0, 1) = 1$.

3. Legyen $f(x, y) = x^3y^5$. Keressük meg f lokális szélsőértékeit! Keressük meg f minimumát és maximumát a $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ csúcsok által meghatározott háromszöglapon!

Megoldás. A függvény maximuma és minimuma lehet a háromszög belsejében, valamelyik élének belsejében, valamint valamelyik csúcsban. A háromszöglap belsejében mindegyik lehetséges szélsőértékhely egy stacionárius pont. Minthogy $f'_x(x, y) = 3x^2y^5$ és $f'_y(x, y) = 5x^3y^4$, a stacionárius pontok a koordinátatengelyek pontjai amik nem esnek a tartomány belsejébe.

A $(0, 0)$ és $(1, 0)$ csúcsú él pontjai felírhatók $(x, 0)$ alakban, ahol $x \in [0, 1]$. Így itt a $g_1(x) = f(x, 0) = 0$ függvény szélsőértékeit keressük, ami minden pontban felvevődik, és értéke 0. Hasonlóan, a $(0, 0)$ és $(0, 1)$ csúcsú él pontjai felírhatók $(0, y)$ alakban, ahol $y \in [0, 1]$. Ekkor az él pontjain f értékei $g_2(y) = f(0, y) = 0$, így minden pont szélsőértékhely. Az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ csúcsú él pontjai felírhatók $(x, 1 - x)$ alakban, ahol $x \in [0, 1]$. Itt a függvény

$g_3(x) = f(x, 1-x) = x^3(1-x)^5$. Mivel $g'_3(x) = 3x^2(1-x)^5 - 5x^3(1-x)^4 = x^2(1-x)^4(3-8x)$, melynek lehetséges szélsőérték helyei az $x = 0$, $x = 1$ és az $x = \frac{3}{8}$ pontok. Így f lehetséges szélsőértékei az $f(x, 0) = 0$, $f(0, y) = 0$ és az $f(\frac{3}{8}, 1 - \frac{3}{8}) = \frac{3^3 \cdot 5^5}{8^8}$ közül kerül ki, így a megadott háromszöglapon a minimum 0, a maximum $\frac{3^3 \cdot 5^5}{8^8} = \frac{84375}{16777216}$. A lokális szélsőértékek meghatározásához megvizsgáljuk a Hesse-determináns értékét a két koordinátatengely pontjaiban, azaz a stacionárius pontokban. Mivel $f''_{xx}(x, y) = 6xy^5$, $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 15x^2y^4$, $f''_{yy}(x, y) = 20x^3y^3$, a determináns értéke mindegyik ilyen pontban 0, tehát ezen vizsgálattal nem dönthető el, hogy ezeken a helyeken f -nek van-e lokális szélsőértéke. Ettől függetlenül is látható viszont, hogy f előjele az első és harmadik negyed belsejében pozitív, míg a másik két negyed belsejében negatív, így f -nek egyik ilyen pontban sincs lokális szélsőértéke.

4. Géza a pajtája falához egy 1 m^3 térfogatú, felülről nyitott, téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta fala alkotja, csak a maradék 3 oldalát és az alját kell elkészítenie. Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia? Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja!

Megoldás. Jelölje a szénatároló vízszintes élei közül a pajta falára merőlegesek hosszát x , a vele párhuzamosak hosszát y , és a szénatároló magasságát z . Ekkor, mivel a tároló térfogata 1 m^3 , fennáll a $xyz = 1$ egyenlőség. A tároló elkészítéséhez felhasználandó anyag arányos az elkészített felület nagyságával, így az $A = 2xz + yz + xy$ kifejezés minimumát keressük. Az $xyz = 1$ egyenlőségből $y = \frac{1}{xz}$, amiből $A = A(x, z) = 2xz + \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$, $x, z > 0$ adódik. Ezen kétváltozós függvény elsőrendű parciális deriváltjai $A'_x(x, z) = 2z - \frac{1}{x^2}$ és $A'_z(x, z) = 2x - \frac{1}{z^2}$. Mindkét derivált a $P(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ pontban nulla. Megvizsgáljuk, hogy tényleg van-e lokális minimum ebben a pontban. A Hesse determináns $D(x, y) = \frac{4}{x^3 z^3} - 4$, azaz $D(P) = 12 > 0$, tehát van lokális szélsőérték P -ben. Minthogy $f''_{xx}(P) = 4 > 0$, itt lokális minimum van. Az optimális téglatest méretei $x = z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $y = \sqrt[3]{4}$.

Ha most a tároló alját a föld alkotja, akkor a minimalizálandó kifejezés az $A = 2xz + yz = \frac{2}{y} + \frac{1}{x}$, ahol $x, y > 0$. Ennek a kifejezésnek nincs stacionárius pontja, azaz lokális minimuma sem. Megfigyelhető az is, hogy ha x, y elegendően nagy, akkor A tetszőlegesen kicsi pozitív szám lehet, azaz ebben az esetben tetszőlegesen kevés anyagból tudunk egységnyi térfogatú szénatárolót építeni, ha a tároló magasságát elegendően kicsire, és a másik két méret mindegyikét elegendően nagyra tervezzük.

5. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit!

- a) $f(x, y) = x^3 - 9x + y^2 - 6y$ b) $f(x, y) = 2x + y + \frac{4}{xy}$
c) $f(x, y) = \frac{1}{x^3} + y^3 - \frac{3y}{x}$ d) $f(x, y) = y^3 - 12y + 2(x + y)^2 - 8(x + y)$
e) $f(x, y) = \frac{1}{xy} + 8y - x$ f) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy + 9y$

Megoldás. A megoldás menete megegyezik az 1) feladat megoldásainak menetével, így csak a végeredményt közöljük.

- a) A stacionárius pontok $P_1(-\sqrt{3}, 3)$ és $P_2(\sqrt{3}, 3)$. A Hesse determináns értéke P_1 -ben negatív és P_2 -ben pozitív, így csak P_2 -ben van lokális szélsőérték. Mivel $f''_{xx}(P_2) > 0$, itt lokális minimum van, melynek értéke $f(P_2) = -6\sqrt{3} - 9$.
b) Az egyetlen stacionárius pont $P(1, 2)$. Mivel $D(P) = 3 > 0$, itt van szélsőérték; mivel $f''_{xx}(P) = 4 > 0$, ez lokális minimum, melynek értéke $f(P) = 6$.
c) Az egyetlen stacionárius pont $P(1, 1)$. Minthogy $D(P) = 27 > 0$, itt van szélsőérték; mivel $f''_{xx}(P) = 6 > 0$, ez lokális minimum, melynek értéke $f(P) = -1$.
d) Két stacionárius pont van: $P_1(0, 2)$ és $P_2(4, -2)$. Most $D(P_1) = 48 > 0$ és $D(P_2) = -48 < 0$,

így egyedül P_1 -ben van lokális szélsőérték. Mivel $f''_{xx}(P_1) = 4 > 0$, ez minimum, melynek értéke $f(0, 2) = -24$.

e) Az egyetlen stacionárius pont $P(2, -\frac{1}{4})$. $D(P) = 48 > 0$, tehát itt van szélsőérték. Minthogy $f''_{xx}(P) = -1 < 0$, ez lokális maximum, melynek értéke $f(P) = -6$.

f) Az egyetlen stacionárius pont $P(-3, \frac{3}{2})$. Mivel $D(P) = -12 < 0$, a függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

6. Határozzuk meg a $z = 4 - x^2 - y^2$ egyenletű felület $z \geq 0$ része és az xy sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak.

Megoldás. Feltehető, hogy a téglatest alapja a $z = 0$ síkban van. Legyen a téglatest valamelyik csúcsa $(a, b, 0)$, ahol $a, b > 0$, és $4 - a^2 - b^2 > 0$. Ekkor a téglatest alapjainak többi csúcsa $(-a, b, 0)$, $(a, -b, 0)$ és $(-a, -b, 0)$. Így a téglatest éleinek hossza $2a, 2b, 4 - a^2 - b^2$. A térfogata $V = 4ab(4 - a^2 - b^2) = 16ab - 4a^3b - 4ab^3$. Ezen függvénynek egyetlen stacionárius pontja van $a, b > 0$ esetén: a $P(1, 1)$ pont, mely belül esik a vizsgált tartományon. Minthogy $D(1, 1) = 512 > 0$, itt van lokális szélsőérték, és mivel $V''_{aa}(1, 1) = -24 < 0$, ez lokális maximum. Vegyük észre, hogy $a = 0$, $b = 0$ vagy $4 - a^2 - b^2 = 0$ esetén a téglatest térfogata nulla, így a térfogat a maximumát tényleg a vizsgált tartomány belsejében veszi fel, azaz P -ben abszolút maximum is van. A maximum értéke $V(1, 1) = 8$, és a téglatest oldalainak hossza 2, 2 és 2.

7. Egy téglatest egy pontban összefutó éleinek összege 60 cm. Mekkora az élek, ha a téglatest térfogata maximális?

Megoldás. Jelölje a téglatest éleinek hosszát x, y, z . Mivel az egy pontban összefutó élek összhossza 60, így $z = 60 - x - y$, ahol $0 < x, y$ és $x + y < 60$. A téglatest térfogata $V(x, y) = xy(60 - x - y)$. Ezen függvénynek egyetlen stacionárius pontja van a vizsgált tartományon: $P(20, 20)$. Most $D(P) = 1200 > 0$ és $V''_{xx}(P) = -40 < 0$, tehát P -ben lokális maximum van, melynek értéke $V(20, 20) = 8000$. Mivel a vizsgált tartomány határán a térfogat nulla, az előző feladathoz hasonlóan következik az is, hogy P -ban globális maximum van. Ebben a pontban a téglatest mindegyik éle 20 cm hosszú.

1. Számoljuk ki:

- a) $\iint_A xy \, d(x, y) = ? \quad A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
 b) $\iint_A x \sin(xy) \, d(x, y) = ? \quad A = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$
 c) $\iint_T x \, d(x, y) = ? \quad T = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq x + 2\}$
 d) $\iint_T \frac{x^2}{y^2} \, d(x, y) = ? \quad T = \{(x, y) \mid \frac{1}{x} \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$
 e) $\iint_T y \sin x^2 \, d(x, y) = ? \quad T = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\}$

Megoldás. a) Az integrálási határok $0 \leq x \leq 1$ és $0 \leq y \leq 1$, azaz az integrál

$$\iint_A xy \, d(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 xy \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x}{2} \, dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

b) Most

$$\begin{aligned} \iint_A x \sin(xy) \, d(x, y) &= \int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(xy) \, dy \, dx = \int_1^3 [-\cos(xy)]_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_1^3 1 - \cos \frac{\pi x}{2} \, dx = \\ &= \left[x - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} \right]_1^3 = 2 + \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

c) A határgörbék metszéspontjainak x -koordinátái az $x^2 = x + 2$ egyenlet megoldásai, azaz $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$. Tehát az integrálási határok $-1 \leq x \leq 2$ és $x^2 \leq y \leq x + 2$.

$$\iint_T x \, d(x, y) = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} x \, dx \, dy = \int_{-1}^2 [xy]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^2 x^2 + 2x - x^3 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{4}.$$

d)

$$\iint_T \frac{x^2}{y^2} \, d(x, y) = \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} \, dy \, dx = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2 -x + x^3 \, dx = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{9}{4}.$$

e)

$$\begin{aligned} \iint_T y \sin x^2 \, d(x, y) &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} y \sin x^2 \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \sin x^2 \right]_0^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} \sin x^2 \, dx = \\ &= \left[-\frac{\cos x}{4} \right]_0^1 = \frac{1 - \cos 1}{4}. \end{aligned}$$

2. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét, és számoljuk ki az alábbi integrálokat:

- a) $\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin x^2 \, dx \, dy = ?$ b) $\int_0^1 \int_{2y}^2 4 \cos(x^2) \, dx \, dy = ?$
 c) $\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} \, dx \, dy = ?$ d) $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} \, dy \, dx = ?$

Megoldás. a) Felrajzolva a tartományt leolvashatóak az fordított sorrendű integrálás határai: $0 \leq y \leq \sqrt{x}$ és $0 \leq x \leq 1$. Azaz az integrál éppen az előző feladatban szereplő utolsó integrál, melynek értékét már kiszámoltuk.

b) A fordított határok: $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ és $0 \leq x \leq 2$. Így az integrál:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{2y}^2 4 \cos(x^2) dx dy &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos(x^2) dy dx = \int_0^2 [4y \cos(x^2)]_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \\ &= \int_0^2 2x \cos(x^2) dx = [\sin(x^2)]_0^2 = \sin 4. \end{aligned}$$

c) A fordított határok: $0 \leq y \leq 2x$ és $0 \leq x \leq 1$. Így

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2} dy dx = \int_0^1 [ye^{x^2}]_0^{2x} dx = \int_0^1 2xe^{x^2} dx = [e^{x^2}]_0^1 = e - 1$$

d) A fordított határok $0 \leq x \leq y^3$ és $0 \leq y \leq 2$. Tehát:

$$\begin{aligned} \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} dy dx &= \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4 + 1} dx dy = \int_0^2 \left[\frac{x}{y^4 + 1} \right]_0^{y^3} dy = \\ &= \int_0^2 \frac{y^3}{y^4 + 1} dy = \left[\frac{1}{4} \ln |y^4 + 1| \right]_0^2 = \frac{\ln 17}{4} \end{aligned}$$

3. Számoljuk ki:

a) $\iint_A \frac{1}{1+x^2} d(x,y) = ?$ $A = a(0,0), (1,1)$ és $(1,0)$ csúcsú háromszög

b) $\iint_A \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} d(x,y) = ?$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^2 \leq y \leq 4\}$

c) $\iint_T xy d(x,y) = ?$ T határgörbék: $y = 0, y = 6 - x, y = \sqrt{x}$

d) $\iint_T \sin^2 x - y^2 d(x,y) = ?$ $T = \{(x,y) \mid y^2 \leq \sin^2 x, 0 \leq x \leq \pi\}$

Megoldás. a) Az integrálás határai $0 \leq y \leq x$ és $0 \leq x \leq 1$. Tehát

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{1}{1+x^2} d(x,y) &= \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dy dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{1+x^2} \right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

b) Mivel az $y = x^2$ görbe és az $y = 4$ egyenes metszéspontjai $x = \pm 2$, vázolva a tartományt leolvashatók az integrálási határok: $x^2 \leq y \leq 4$ és $0 \leq x \leq 2$. Így

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} d(x,y) &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} dy dx = \int_0^2 [x \operatorname{arsh} y]_{x^2}^4 dx = \int_0^2 x (\operatorname{arsh} 4 - \operatorname{arsh} x^2) dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} (\operatorname{arsh} 4 - \operatorname{arsh} x^2) \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{x^4+1}} dx = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx = \frac{1}{4} \left[\frac{(x^4+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^2 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}. \end{aligned}$$

c) Az $y = \sqrt{x}$ és az $y = 6 - x$ görbék egyetlen metszéspontja $P(4,2)$. Az integrálás sorrendjének megfelelően kétféle paraméterezés közt választhatunk. Az első esetben két normáltartomány

uniójára bontjuk az eredeti tartományt, melyek határai: $0 \leq y \leq \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, valamint $0 \leq y \leq 6 - x$, $4 \leq x \leq 6$. A második esetben egy normáltartományként írjuk fel a határokat: $y^2 \leq x \leq 6 - y$ és $0 \leq y \leq 2$. Mi az utóbbi utat követjük.

$$\begin{aligned} \iint_T xy \, d(x, y) &= \int_0^2 \int_{y^2}^{6-y} xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left[\frac{yx^2}{2} \right]_{y^2}^{6-y} dy = \int_0^2 \frac{y(6-y)^2}{2} - \frac{y^5}{2} dy = \\ &= \int_0^2 \frac{y^3}{2} - 6y^2 + 18y - \frac{y^5}{2} dy = \left[\frac{y^4}{8} - 2y^3 + 9y^2 - \frac{y^6}{12} \right]_0^2 = \frac{50}{3}. \end{aligned}$$

d) Mivel $-\sin x \leq x \leq \pi$ esetén $\sin x \geq 0$, ezért az integrálás határai $-\sin x \leq y \leq \sin x$. Tehát:

$$\begin{aligned} \iint_T \sin^2 x - y^2 \, d(x, y) &= \int_0^\pi \int_{-\sin x}^{\sin x} \sin^2 x - y^2 \, dy \, dx = \int_0^\pi \left[y \sin^2 x - \frac{y^3}{3} \right]_{-\sin x}^{\sin x} dx = \\ &= \int_0^\pi \frac{4}{3} \sin^3 x \, dx = \frac{4}{3} \int_0^\pi \sin x - \sin x \cos^2 x \, dx = \frac{4}{3} \left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^\pi = \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

4. Számítsuk ki az $\iiint_V xy^2 z^3 \, dV$ integrál értékét, ha az első tényolcadba eső V korlátos térrész határai a $z = xy$ egyenletű felület, valamint a $z = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = x$ egyenletű síkok.

Megoldás. Az integrálás határai $0 \leq z \leq xy$, $0 \leq y \leq x$ és $0 \leq x \leq 1$. Tehát:

$$\begin{aligned} \iiint_V xy^2 z^3 \, dV &= \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xy^2 z^3 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^x \left[\frac{xy^2 z^4}{4} \right]_0^{xy} dy \, dx = \int_0^1 \int_0^x \frac{x^5 y^6}{4} dy \, dx = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^5 y^7}{28} \right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^{12}}{28} dx = \left[\frac{x^{13}}{364} \right]_0^1 = \frac{1}{364}. \end{aligned}$$

5. Számítsuk ki a megadott felületekkel határolt korlátos térrész térfogatát!

a) $y = 0, y = 2, z = 0, z = 2 - 2x^2$

b) $x^2 = y + z, y = 0, z = 0, x = 2$

Megoldás. a) A $z = 2 - 2x^2$ felület és a $z = 0$ koordinátság sík metszete az $x = \pm 1$ egyenesek uniója. Így a térfogatot kettős integrállal kiszámolhatjuk, ahol a függvény $z = 2 - 2x^2$, és az integrálás határai $0 \leq y \leq 2$ és $-1 \leq x \leq 1$. Tehát:

$$V = \int_{-1}^1 \int_0^2 (2 - 2x^2) \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [y(2 - 2x^2)]_0^2 dx = \int_{-1}^1 (4 - 4x^2) \, dx = \left[4x - \frac{4}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{16}{3}.$$

b) A térbeli tartományt vázolva a határok: $0 \leq z \leq x^2 - y$, $0 \leq y \leq x^2$ és $0 \leq x \leq 2$. Így akár kettős, akár hármasintegrállal meghatározható a térfogat. Most az utóbbit választjuk, ekkor az integrálandó függvény az $(x, y, z) \mapsto 1$. Tehát:

$$V = \int_0^2 \int_0^{x^2} \int_0^{x^2-y} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^2 \int_0^{x^2} (x^2 - y) \, dy \, dx = \int_0^2 \frac{x^4}{2} \, dx = \frac{16}{5}.$$

1. Számoljuk ki:

- a) $\iint_T y^2 dT = ? \quad T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$
 b) $\iint_T x^2 y dT = ? \quad T = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$
 c) $\iint_T 7xy^4 dT = ? \quad T = \{(x, y) \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq \sqrt{3}x\}$

Megoldás. a) Térjünk át síkbeli polárkoordinátarendszerre, azaz alkalmazzuk az $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ helyettesítést. Ekkor a tartományt meghatározó egyenlőtlenségek $r^2 \leq 4$ és $0 \leq r \sin \phi \leq r \cos \phi$, azaz leegyszerűsítve $0 \leq r \leq 2$ és $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$. A transzformáció Jacobi-determinánsa a tanultak szerint r , azaz a transzformáció végrehajtása után az integrál:

$$\iint_T y^2 dT = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \sin^2 \phi \cdot r d\phi \right) dr = \int_0^2 r^3 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \phi d\phi = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 \cdot \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

b) Síkbeli polárkoordinátarendszerben a tartományt meghatározó egyenlőtlenségek $1 \leq r \leq 2$ és $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Így az integrál:

$$\begin{aligned} \iint_T x^2 y dT &= \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 \phi \cdot r \sin \phi \cdot r d\phi \right) dr = \int_1^2 r^4 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \phi \sin \phi d\phi = \\ &= \left[\frac{r^5}{5} \right]_1^2 \cdot \left[-\frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{31}{15} \end{aligned}$$

c) Síkbeli polárkoordinátarendszerben a tartomány $2 \leq r \leq 3$ és $\sin \phi \geq \sqrt{3} \cos \phi \geq 0$, amiből $\frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Így:

$$\begin{aligned} \iint_T 7xy^4 dT &= \int_2^3 \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 7r^5 \cos \phi \sin^4 \phi \cdot r d\phi \right) dr = \int_2^3 7r^6 dr \cdot \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \sin^4 \phi d\phi = \\ &= \left[r^7 \right]_2^3 \cdot \left[\frac{\sin^5 \phi}{5} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2059 \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{10} \end{aligned}$$

2. Számítsuk ki az $\iint_T \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} dT$ integrál értékét, ha T az $4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$, $x \leq 0$, $y \geq 0$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány.

Megoldás. Síkbeli polárkoordinátákat használva a tartomány $2 \leq r \leq 5$, $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$. Így

$$\begin{aligned} \iint_T \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} dT &= \int_2^5 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{r \cos \phi \cdot r \sin \phi}{r} \cdot r d\phi \right) dr = \int_2^5 r^2 dr \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \phi \sin \phi d\phi \\ &= \left[\frac{r^3}{3} \right]_2^5 \cdot \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{29}{2}. \end{aligned}$$

3. Számoljuk ki az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű henger és a $z = 0$, valamint a $z = 2 - x - y$ egyenletű síkok által határolt térrész térfogatát!

Megoldás. Vegyük észre, hogy ha $x^2 + y^2 \leq 1$, akkor $0 \leq 2 - x - y$. Így a kérdéses térfogatot kiszámolhatjuk, mint az $f(x, y) = 2 - x - y$ függvény integrálját az $x^2 + y^2 \leq 1$ egyenlőtlenséggel adott T körlapon, tehát $V = \iint_T (2 - x - y) d(x, y)$. A kétváltozós integrált síkbeli polárkoordinátákra áttérés után számoljuk ki. Ekkor a tartomány $0 \leq r \leq 1$ és $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Tehát:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (2 - r \cos \phi - r \sin \phi) r d\phi \right) dr = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (2r - r^2 \cos \phi - r^2 \sin \phi) d\phi \right) dr = \\ &= \int_0^1 [2r\phi + r^2 \cos \phi - r^2 \sin \phi]_0^{2\pi} dr = \int_0^1 4\pi r d\phi = [2\pi r^2]_0^1 = 2\pi. \end{aligned}$$

4. A V korlátos térrész határai a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, illetve a $z = 1$ egyenletű felületek. Számítsuk ki az $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dV$ integrál értékét!

Megoldás. A V térrészt az $x^2 + y^2 \leq 1$ és $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ egyenlőtlenségek határozzák meg. Hengerkoordinátákra áttérve az egyenlőtlenségek $0 \leq r \leq 1$, $r \leq z \leq 1$ és $0 \leq \phi \leq 2\pi$ alakúak. Mivel a Jacobi determináns r , így az integrál:

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dV &= \int_0^1 \left(\int_r^1 \left(\int_0^{2\pi} r^2 d\phi \right) dz \right) dr = \int_0^1 \left(\int_r^1 [r^2 \phi]_0^{2\pi} dz \right) dr = \\ &= \int_0^1 \left(\int_r^1 2\pi r^2 dz \right) dr = \int_0^1 [r^2 z]_r^1 dr = \int_0^1 (r^2 - r^3) dr = \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

5. Számoljuk ki a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ egyenletű felületek által határolt korlátos térrész térfogatát!

Megoldás. Hengerkoordinátákban a két felület egyenlete $z = r$ és $z = 6 - r^2$. Mivel $r \geq 0$, az $r = 6 - r^2$ egyenlet egyetlen megoldása $r = 2$, és $0 \leq r \leq 2$ esetén $r \leq 6 - r^2$. Tehát a két felület által meghatározott korlátos részt a $0 \leq r \leq 2$, $r \leq z \leq 6 - r^2$ és $0 \leq \phi \leq 2\pi$ egyenlőtlenségek írják le, és a térfogat

$$\begin{aligned} \iiint_V 1 dV &= \int_0^2 \left(\int_r^{6-r^2} \left(\int_0^{2\pi} r d\phi \right) dz \right) dr = \int_0^2 \left(\int_r^{6-r^2} 2\pi r dz \right) dr = \int_0^2 [2\pi r z]_r^{6-r^2} dr = \\ &= \int_0^2 (-2\pi r^3 - 2\pi r^2 + 12\pi r) dr = \pi \cdot \left[-\frac{r^4}{2} - \frac{2r^3}{3} + 6r^2 \right]_0^2 = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

6. Számítsuk ki az $\iiint_V xyz dV$ integrál értékét, ahol a V korlátos térrész az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ gömb belsejének az $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ ténnyolcadba eső része.

Megoldás. Gömbi polárkoordinátákra térünk át, azaz alkalmazzuk az $x = r \cos \theta \cos \phi$, $y = r \cos \theta \sin \phi$, $z = r \sin \theta$ koordinátatranszformációt. Ekkor az integrálási tartományt a $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ és $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ egyenlőtlenségek írják le. Minthogy a transzformáció Jacobi-determinánsa $r^2 \cos \theta$, így:

$$\begin{aligned} \iiint_V xyz \, dV &= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5 \cos^3 \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi \, d\phi \right) d\theta \right) dr = \\ &= \int_0^1 r^5 \, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin \theta \, d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \sin \phi \, d\phi = \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^1 \cdot \left[-\frac{\cos^4}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

7. Számoljuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ és a $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott térrész térfogatát!

Megoldás. Gömbi polárkoordinátákra áttérve az egyenlőtlenségek $0 \leq r \leq 1$ és $r \cos \theta \leq r \sin \theta \leq \sqrt{3}r \cos \theta$ alakúak, amiből az integrálás határai $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ és $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$. A térfogat:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V 1 \, dV = \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta \, d\phi \right) d\theta \right) dr = \\ &= \int_0^1 r^2 \, dr \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, d\phi = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})\pi}{3}. \end{aligned}$$

1. Határozzuk meg a következő sorok konvergenciatartományát!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} (x-1)^n & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!} (x+7)^n & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (n+3)}{n^2+3} x^n \\ \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n^2 \cdot 3^n} & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{3n} & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n} (x-2)^{2n} \end{array}$$

Megoldás. a) Kiszámoljuk a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ határértéket az $a_n = \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}$ sorozatra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Ha a_n konvergens, akkor $\limsup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, így a konvergenciasugár $r = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. A hatványsor középpontja $a = 1$, tehát a hatványsor konvergens az $(1-2, 1+2) = (-1, 3)$ intervallumon, és ennek külső pontjaiban nem. Megnézzük az intervallum határát. Ha $x = -1$, akkor a hatványsor értéke $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, amiről ismert, hogy divergens. Ha $x = 3$ at helyettesítünk, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ numerikus sort kapjuk. Ez a sor váltakozó előjelű, az elemei abszolút értékeinek sorozata nullához tart és monoton csökkenő, tehát a sor Leibniz típusú, így konvergens. A konvergenciatartomány: $(-1, 3]$.

b) Itt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} (2n+3)}{(2n+2)!}}{\frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{(2n+1)(2n+2)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{(2 + \frac{1}{n})(2n+2)^2} = 0,$$

tehát a konvergenciasugár $r = \infty$. Tehát a hatványsor az egész $\mathbb{R}$ halmazon konvergens.

c) Hasonlóan levezethető, hogy a konvergenciasugár $r = \frac{1}{2}$. Vizsgáljuk meg a konvergenciát $x = \pm \frac{1}{2}$ esetén. Ha $x = -\frac{1}{2}$, akkor a kapott numerikus sor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+3}$. Minthogy minden $n \geq 1$ esetén $\frac{n+3}{n^2+3} \geq \frac{n}{n^2+3n^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}$, és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens, a minoráns-elv miatt ez a sor is divergens. Legyen most $x = \frac{1}{2}$. Ekkor a kapott sor $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+3}{n^2+3}$. Levezethető, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^2+3} = 0$, és a $\left\{ \frac{n+3}{n^2+3} \right\}$ sorozat monoton csökkenő $n \geq 7$ esetén, a vizsgált sor leibniz-típusú, tehát konvergens. A konvergenciatartomány: $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

d) Alkalmazzuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n^2 \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 \cdot 3^n} (x+2)^n$ átalakítást. Erre a hatványsorra az előzőekhez hasonlóan adódik, hogy a konvergenciasugara $r = \frac{3}{2}$, azaz, mivel a középpontja $a = -2$, a $(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$ intervallumon konvergens. A két végpontban külön megvizsgálva a konvergenciát láthatjuk, hogy mindegyikben konvergens a hatványsor. Tehát a konvergenciaintervallum: $[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}]$.

e) Végezzük el az $x^3 = y$ helyettesítést. Az előző módszerekkel levezethető, hogy az így kapott $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} y^n$ hatványsor konvergenciaintervalluma $(-2, 2)$. Így az eredeti hatványsor $-2 < x^3 < 2$ esetén konvergens, amiből a konvergenciaintervalluma $(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$. f) Hasonlóan adódik, hogy a hatványsor $-9 < (x-2)^2 < 9$ esetén konvergens, amiből a hatványsor konvergenciaintervalluma $(-1, 5)$.

2. Határozzuk meg a következő sorok konvergenciasugarát!

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}} x^n$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$$

Megoldás. a) Vizsgáljuk az $a_n = \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}}$ sorozatra a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ határértéket. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^n}{(n+6)^n \cdot \sqrt[n]{n+6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{6}{n}\right)^n \cdot \sqrt[n]{n+6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^2}{e^6 \cdot 1} = e^{-4},$$

felhasználva azt, hogy $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n+6} \leq \sqrt[n]{7n} \leq (\sqrt[n]{n})^2$, ha $n \geq 7$, így a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ nevezetes határérték felhasználásával a rendőr-elv alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+6} = 1$. A kiszámolt határértékből azt kapjuk, hogy a vizsgált hatványsor konvergenciasugara $r = \frac{1}{e^4} = e^{-4}$.

b) Most

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e.$$

Tehát a konvergenciasugár $r = \frac{1}{e}$.

3. Adjuk meg az alábbi függvények x_0 bázispontú Taylor-sorfejtését és annak konvergenciatartományát!

$$a) f(x) = \frac{1}{x-3}, \quad x_0 = 0; \quad x_0 = 5$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad x_0 = 2; \quad x_0 = -5$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x^2+3}, \quad g(x) = \frac{x^5}{x^2+3}, \quad x_0 = 0 \quad d) f(x) = \frac{1}{x+7}, \quad g(x) = \frac{3x^4}{x+7}, \quad x_0 = 0$$

Megoldás. Idézzük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mértani sor pontosan $|q| < 1$ esetén konvergens, és ekkor összege $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

a) Az előző nevezetes sorösszeget alkalmazva $\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x}{3}\right)} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^n}{3^{n+1}}$, és a kapott sor $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$ esetén, azaz a $(-3, 3)$ tartományon konvergens. Másrészt, $\frac{1}{x-3} = \frac{1}{(x-5)+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x-5}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-5}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-5)^n$, és a kapott sor $\left|\frac{x-5}{2}\right| < 1$ esetén, azaz a $(3, 7)$ tartományon konvergens.

b) Az előző feladat módszerével $\frac{1}{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (x-2)^n$, és a sor $-2 < x < 6$ esetén konvergens. Másrészt $\frac{1}{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3^{n+1}} (x+5)^n$, és a sor $-8 < x < -2$ esetén konvergens.

c) Itt $\frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{3}\right)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{2n}$, és a sor $\left|-\frac{x^2}{3}\right| < 1$, azaz a $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ intervallumon konvergens. Így $\frac{x^5}{x^2+3} = x^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{2n+5}$, és a sor ugyanezen az intervallumon konvergens.

d) $\frac{1}{x+7} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}} x^n$, és a sor a $(-7, 7)$ intervallumon konvergens. Emellett $\frac{3x^4}{x+7} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot (-1)^n}{7^{n+1}} x^{n+4}$, és a sor ugyanitt konvergens.

4. Írjuk fel az alábbi függvények x_0 pontbeli Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát!

- a) $f_1(x) = \sin 3x^2$ $x_0 = 0$ b) $f_2(x) = e^{4x}$ $x_0 = 0$; $x_0 = 3$
 c) $f_3(x) = \operatorname{sh} 2x^4$, $x_0 = 0$ d) $f_4(x) = e^{-2x} \operatorname{ch} 5x$, $x_0 = 0$

Megoldás. a) A segédleten szereplő nevezetes hatványsorok közt szerepel a $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$ egyenlőség. Így $\sin 3x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (3x^2)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{4n+2}$, és az egyenlőség tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll. Tehát a sor konvergenciataromány $\mathbb{R}$.

b) Hasonlóan $e^{4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} x^n$, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.

c) Ugyanígy $\operatorname{sh} 2x^4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)}{(2n+1)!} (2x^4)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^{2n+1})}{(2n+1)!} x^{8n+4}$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. d) Mivel $\operatorname{ch} 5x = \frac{e^{5x} + e^{-5x}}{2}$, így $f_4(x) = \frac{e^{3x} + e^{-7x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-7)^n}{2 \cdot (n!)} x^n$, és a sor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens.

5. Adjuk meg az $f(x) = 5x^3 e^{-3x^2}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorfejtését és annak konvergenciatarományát! Számítsuk ki $f^{(100)}(0)$ és $f^{(101)}(0)$ értékét!

Megoldás. Hasonlóan az előzőekhez: $f(x) = 5x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-3)^n}{n!} x^{2n+3}$, és a konvergenciaintervallum $\mathbb{R}$. Minthogy f x_0 körüli Taylor-sora $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$, a fenti sorral való összehasonlításból $f^{(100)}(0) = 0$, mivel f Taylor-sorában csak páratlan kitevős tagok szerepelnek. Ugyanígy adódik az $f^{(101)}(0) = 101! \cdot \frac{5(-3)^{49}}{49!}$ egyenlőség.

6. Írjuk fel az $f(x) = \frac{1}{x+3}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorfejtését, és határozzuk meg a konvergenciasugarat (R_1 -et)! Az f függvény sorfejtésére támaszkodva írjuk fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú sorfejtését!

- a) $g(x) = \ln(x+3)$, $R_2 = ?$ b) $h(x) = \frac{1}{(x+3)^3}$, $R_3 = ?$

Megoldás. Az eredeti függvény Taylor-sora: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n$, és ennek konvergenciasugara $R_1 = 3$.

a) Vegyük észre, hogy $g(x) = g(0) + \int_0^x f(t) dt = \ln 3 + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} t^n dt = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} t^n dt = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} x^{n+1}$, felhasználva a hatványsorok tagonkénti integrálására vonatkozó tételt. A g függvény Taylor-sorának konvergenciasugara megegyezik az f függvényével, azaz $R_2 = R_1 = 3$.

b) Vegyük észre, hogy $f''(x) = \frac{2}{(x+3)^3}$, tehát $h(x) = \frac{1}{2} f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 3^{n+1}} n \cdot (n-1) x^{n-2}$, mivel hatványsorok tagonként deriválhatóak. A konvergenciasugár $R_3 = R_1 = 3$.

7. Tudjuk, hogy $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$, $R = 1$.

a) Írjuk fel az $f(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát, és adjuk meg a konvergenciasugarat!

b) Az f függvény sorfejtését felhasználva adjuk meg az $\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right) dx$ integrál értékét az f függvény negyedfokú Taylor-polinomjának felhasználásával, és becsüljük meg a hibát!

Megoldás. a) Mivel $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, így $\ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n} x^{2n}$, és a sor konvergenciasugara $R_2 = \sqrt{3}$.

b) Az integrál végtelen-sor alakban is megadható tagonkénti integrálással: $\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1) \cdot 3^n} = \frac{1}{9} - \frac{1}{90} + \frac{1}{567} - \dots$. Ha a közelítésre f negyedfokú Taylor polinomját használjuk az integrál becslésére, akkor, f Taylor-sorát használva látható, hogy az $n = 1, 2$ tagokat kell figyelembe venni. Tehát az integrál közelítő értéke: $I = \frac{1}{9} - \frac{1}{90} = \frac{1}{10}$. Mivel a kapott numerikus sor váltakozó előjelű, és az elemek sorozata monoton csökkenve tart nullához, a sor Leibniz-típusú, így tetszőleges részletösszegnek a teljes sorösszegetől vett eltérése felülről becsülhető a soron következő tag abszolút értékével. Más szóval, I értékétől az integrál legfeljebb $\frac{1}{567}$ -tel tér el.

1. Írjuk fel az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ és $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát! Adjuk meg elemi műveletekkel az x^4 együtthatóit!

Megoldás. A tanultak alapján tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ és $|x| < 1$ esetén $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, ahol $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$. Így $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left(-\frac{x}{4}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-\frac{x}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4^n} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n$. A sor konvergenciasugarát az $\left|-\frac{R_1}{4}\right| = 1$ egyenlőségből számolhatjuk ki, azaz $R_1 = 4$. Hasonlóan adódik, hogy $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4^n} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$, és a sor konvergenciasugara $R_2 = 2$. Az x^4 együtthatója f Taylor-sorában $a_4 = \frac{(-1)^4}{2 \cdot 4^4} \binom{-\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{2^9} \cdot \frac{(-1)^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}}{4!} = \frac{35}{65536}$. Hasonlóan x^4 együtthatója g Taylor-sorában $b_4 = \frac{3}{256}$.

2. Legyen $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{32-2x^2}}$ és $x_0 = 0$.

- a) Írjuk fel az f függvény x_0 bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát!
b) x^8 együtthatója? (Elemi műveletekkel adjuk meg!)
c) $f^{(26)}(0) = ?$, $f^{(25)}(0) = ?$

Megoldás. a) Most $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left(-\frac{x^2}{16}\right)\right)^{-\frac{1}{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 16^n} \binom{-\frac{1}{5}}{n} x^{2n}$, és a sor konvergenciasugara $R = 4$.
b) x^8 együtthatója $\frac{(-1)^4}{2 \cdot 16^4} \binom{-\frac{1}{5}}{4} = \frac{11}{20480000}$.
c) x^{26} együtthatója $\frac{f^{(26)}(0)}{26!}$. Így $f^{(26)}(0) = \frac{(-1)^{13}}{2 \cdot 16^{13}} \binom{-\frac{1}{5}}{13} \cdot 26! = \frac{26! \cdot 848839088}{2^{53} \cdot 30517578125}$. Hasonlóan adódik, hogy $f^{(25)}(0) = 0$.

3. Írjuk fel a $g(x) = \frac{2x^3}{\sqrt[5]{32-2x^2}}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát! Számítsuk ki $g^{(102)}(0)$ és $g^{(103)}(0)$ értékét!

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16^n} \binom{-\frac{1}{5}}{n} x^{2n+3}$, és a konvergenciasugár $R = 4$. A deriváltak: $g^{(102)}(0) = 0$ és $g^{(103)}(0) = \frac{(-1)^{50}}{16^{50}} \binom{-\frac{1}{5}}{50}$.

4. Adjuk meg az $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$ integrál értékét az integrandus nyolcadfokú Taylor-polinomjának felhasználásával, és becsüljük meg a hibát!

Megoldás. Mivel $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{4n}$ $|x| < 1$ esetén, az integrál $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{(4n+1) \cdot 2^{4n+1}}$. A numerikus sor n -edik eleme $a_n = \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{(4n+1) \cdot 2^{4n+1}} = (-1)^n \cdot \frac{1}{(4n+1) \cdot 2^{4n+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} \dots \frac{2n-1}{2^n}$, azaz láthatóan $|a_n|$ egy monoton csökkenő, és 0-hoz konvergáló sorozat. Tehát a sor Leibniz típusú, így ha az integrált a $\sum_{k=0}^n a_k$ véges összeggel közelítjük, akkor a becslésnek az integráltól való eltérése legfeljebb $|a_{n+1}|$. Jelen esetben a nyolcadfokú Taylor-polinom használata esetén $n = 2$, tehát a közelítő összeg $a_0 + a_1 + a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{30533}{61440}$, és a becslése hibája legfeljebb $a_3 = \frac{5}{1703936}$.

5. Írjuk fel az $f(x) = \sqrt[4]{1+2x^3}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát! Számítsuk ki $f^{(9)}(0)$ és $f^{(10)}(0)$ értékét!

Megoldás. A Taylor-sor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \binom{-\frac{1}{4}}{n} x^{3n}$, és a sor konvergenciasugara, a $2R^3 = 1$ egyenlőséget felhasználva, $R = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Így $f^{(9)}(0) = 2^3 \binom{-\frac{1}{4}}{3} 9! = -304200$, és $f^{(10)}(0) = 0$.

6. Legyen $f(x) = 0$ ha $x \in (-\pi, 0]$, és $f(x) = 2$ ha $x \in (0, \pi]$. Írjuk fel f Fourier-sorát! Mely pontokban állítja elő f Fourier-sora a függvényt?

Megoldás. A függvény és deriváltja szakaszonként folytonos, valamint a függvény korlátos és 2π szerint periodikus, így a Fourier-sora pontonként konvergens. A Fourier-sor határértéke x_0 -ban $f(x_0)$, ha f folytonos x_0 -ban, egyébként a két féoldai határérték átlaga. Tehát a Fourier-sor $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén állítja elő a függvényt. Számoljuk ki a Fourier-sor együtthatóit:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2 dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos(n\pi)) = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

Így a Fourier-sor $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \sin(nx)$. Megjegyezzük, hogy észrevehető, hogy, az intervallumon végpontjaitól eltekintve, az $f(x) - \pi$ függvény páratlan, amiből (számolás nélkül) következik, hogy $a_n = 0$, ha $n \geq 1$.

7. Legyen $f : (0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, és terjesszük ki ezt a függvényt periodikusan $\mathbb{R}$ -re. Írjuk fel f Fourier-sorát! Mely pontokban állítja elő a Fourier-sor a függvényt?

Megoldás. Hasonlóan az előző feladathoz, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén állítja elő a Fourier-sor a függvényt. Az együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[x \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right) = -\frac{2}{n} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}.$$

Tehát a Fourier-sor $f(x) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nx)$.

8. Legyen $f(x) = 0$ ha $x \in (-\pi, 0]$, és $f(x) = x/2$ ha $x \in (0, \pi]$. Írjuk fel f Fourier-sorát! Mely pontokban állítja elő f Fourier-sora a függvényt?

Megoldás. A Fourier-sor a függvényt $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ esetén állítja elő. Az együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{x}{2} dx = \frac{\pi}{8},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{x}{2} \cos(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x \sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^\pi = \frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{x}{2} \sin(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{2n\pi}.$$

A Fourier-sor: $f(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{2n\pi} \sin(nx) \right).$

- b. Jelöljük f -fel az abszolútérték-függvény periodikus kiterjesztését a $[-\pi, \pi)$ intervallumról a számegyenesre. Írjuk fel a Fourier-sorát!

Megoldás. Mivel a függvény az $x \neq \pi + 2k\pi$ pontoktól eltekintve páros, így $b_n = 0$ minden $n \geq 1$ esetén. A Fourier-sor együtthatói:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_1^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^\pi = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi}.$$

Így a Fourier-sor: $f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi} \cos(nx).$