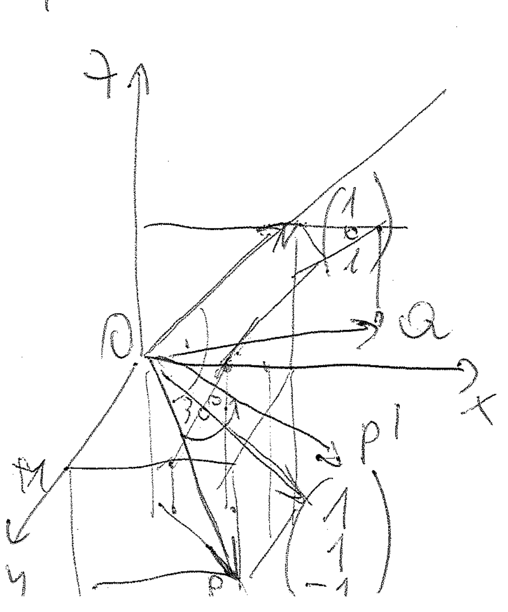
Feladatok

1) Tükrözzük a $P(1,2,3)$ pontot az $2x+3y+5z=0$ síkra. $\underline{n}=\left(\frac{2}{\sqrt{38}},\frac{3}{\sqrt{38}},\frac{5}{\sqrt{38}}\right)$

$$T_s=\begin{pmatrix} \left(1-2\frac{4}{38}\right) & \left(-\frac{6}{38}\right) & \left(-\frac{10}{38}\right) \\ -\frac{3}{19} & 1-2\cdot\frac{9}{38} & -\frac{15}{38} \\ -\frac{5}{19} & -\frac{15}{38} & 1-2\cdot\frac{25}{38} \end{pmatrix}$$

$$T_s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{15}{19} & -\frac{3}{19} & -\frac{5}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{10}{19} & -\frac{15}{38} \\ -\frac{5}{19} & -\frac{15}{38} & -\frac{12}{38} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{15-6-15}{19} \\ \frac{-6+20-45}{38} \\ \frac{-10-30-36}{38} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{6}{19} \\ -\frac{31}{38} \\ -2 \end{pmatrix}$$

2) Forgassuk el az $P=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ pontot az $x=z$ $y=0$ egyenes körül $30°$-al ~~úgy hogy pr az~~ úgy, hogy az $\{\vec{OP},v,\vec{OP'}\}$ vektorrendszer j. r. legyen $v=(1,0,1)^T$ vektorral



$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ vektor skalárszorzata $\vec{OP}$-vel $= 0$

$\Rightarrow \vec{OP} \perp \vec{OQ}$ $\quad \langle \vec{OQ} \mid \underline{v} \rangle = 0$ de

$|\vec{OQ}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \qquad |\vec{OP}| = \sqrt{3}$

így $\left| \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \vec{OQ} \right| = |\sqrt{2}\, \vec{OQ}| = |\vec{OP}| \Rightarrow$

$\vec{OP'} = (\cos 30^\circ)\, \vec{OP} + (\sin 30^\circ)(\sqrt{2}\, \vec{OQ}) =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

H.f. Kiszámolni a 3 mátrixot és a trafót

(Egység egyes irányvektor $\underline{n} = \underline{v} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ $\quad V_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$V_e = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad V_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}} \qquad \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{V_e + \cos\alpha\, V_s + \sin\alpha\, V_x = A_\varphi}$$

3) ~~Az (1,1,2) irányvektorú~~ egyenes ~~Q(1,-1,3)~~ (-3)

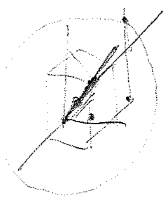
~~pontra áthelyező~~

Az (1,1,2) irányvektorú egyenes körüli forgást ~~tükrözése~~ a végül P pont áthelyezi a

Q(1,-1,3) pontba. Mikor lesz legrövidebb

az S$(\cancel{1},\cancel{1},\cancel{0})$ ponttól? Mikor lesz az
(0,1,2)

OQS$_\Delta$ területe a lehető legkisebb vagy



legnagyobb? $\quad \underline{v} = u^\circ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{2}{\sqrt6} \end{pmatrix}$

$$V_e = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad V_s = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad V_x = \frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \cos\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin\varphi\begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{2}{\sqrt6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{5}{\sqrt6}\sin\varphi \\ 1 - 2\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt6}\sin\varphi \\ 2 + \cos\varphi + \frac{2}{\sqrt6}\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$d(\varphi) = \sqrt{\frac{5}{6}\sin^2\varphi + \left(2\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt6}\sin\varphi\right)^2 + \left(\cos\varphi + \frac{2}{\sqrt6}\sin\varphi\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{6}\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi + \frac{1}{6}\sin^2\varphi - \frac{4}{\sqrt6}\cos\varphi\sin\varphi + \cos^2\varphi + \frac{4}{6}\sin^2\varphi + \frac{4}{\sqrt6}\cos\varphi\sin\varphi} = \sqrt{\frac{5}{3}\sin^2\varphi + 5\cos^2\varphi} = \sqrt{5 - \frac{10}{3}\sin^2\varphi}$$

$$\max d\varphi \Rightarrow \varphi \sqrt{5 - \frac{10}{3}}\;{}' = {}' \iff \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\sqrt{1 - \frac{10}{\sqrt6}\sin\varphi + \frac{25}{6}\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi + \frac{1}{6}\sin^2\varphi - \cancel{\frac{4}{\sqrt6}\sin\varphi\cos\varphi}}$$

$$\overline{+ 4\cos^2\varphi + \frac{4}{6}\sin^2\varphi + \cancel{\frac{4}{\sqrt6}\sin\varphi\cos\varphi}} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{10}{\sqrt6}\sin\varphi + 5\sin^2\varphi + 5\cos^2\varphi} = \sqrt{6 - \frac{10}{\sqrt6}\sin\varphi}$$

minimálně $\sin\varphi = 1$ $\quad \underline{\varphi = \frac{\pi}{2}}$

$$\boxed{P' = \begin{pmatrix} 1 - \frac{5}{\sqrt6} \\ 1 + \frac{1}{\sqrt6} \\ 2 + \frac{2}{\sqrt6} \end{pmatrix}}$$

$\vec{OS} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{OP} \begin{pmatrix} 1 - \frac{5}{\sqrt6}\sin\varphi \\ 1 - 2\cos\varphi + \frac{1}{\sqrt6}\sin\varphi \\ 2 + \cos\varphi + \frac{2}{\sqrt6}\sin\varphi \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{OS} \times \vec{OP} \begin{pmatrix} \cancel{2} - 4\cos\varphi + \cancel{\frac{2}{\sqrt6}\sin\varphi} - \cancel{2} - \cos\varphi - \cancel{\frac{2}{\sqrt6}\sin\varphi} \\ 2 - \frac{10}{\sqrt6}\sin\varphi \\ 1 - \frac{5}{\sqrt6}\sin\varphi \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -5\cos\varphi \\ 2 - \frac{10}{\sqrt6}\sin\varphi \\ 1 - \frac{5}{\sqrt6}\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad |\vec{OS} \times \vec{OP}|^2 = 25\cos^2\varphi + 4 + \frac{100}{6}\sin^2\varphi -$$

$$- \frac{40}{\sqrt6}\sin\varphi + 1 + \frac{25}{6}\sin^2\varphi - \frac{10}{\sqrt6}\sin\varphi =$$

$$= 5 + 25\cos^2\varphi + \frac{125}{6}\sin^2\varphi - \frac{50}{\sqrt6}\sin\varphi = 30 + \left(\frac{125}{6} - \frac{150}{6}\right)\sin^2\varphi$$

$$- \frac{50}{\sqrt6}\sin\varphi = 30 - \frac{25}{6}\sin^2\varphi - \frac{50}{\sqrt6}\sin\varphi$$

Řešíme max $\quad -\frac{50}{6}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{50}{\sqrt6}\cos\varphi = 0$

$$-\frac{10}{\sqrt6}\cos\varphi\left(\frac{1}{\sqrt6}\sin\varphi + 1\right) \Rightarrow \cos\varphi = 0 \quad \boxed{\varphi_1 = \frac{\pi}{2}} \; \boxed{\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}}$$

$\left(\frac{1}{\sqrt6}\sin\varphi + 1\right) \neq 0$

$$\vec{OP}_{min} \overset{\sin\varphi = \frac{\pi}{2}}{\underset{\sin\varphi = 1}{=}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2 + \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad \vec{OP}_{max} \overset{\varphi = \frac{3\pi}{2}}{\underset{\sin\varphi = 1}{=}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 1 \cancel{+} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 2 - \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$T_{min}^2 = 30 - \frac{25}{6} - \frac{50}{\sqrt{6}} \qquad T_{max}^2 = 30 - \frac{25}{6} + \frac{50}{\sqrt{6}}$$

4) Igazoljuk, hogy az eltolások Abel csoportot alkotnak

5) Igazoljuk, hogy a forgatások csoportot alkotnak de ez a csoport nem kommutatív

6) A közös középpontú forgatások Abel csoportot alkotnak

7) Részcsoportot alkotnak-e a forgatva tükrözések, vagy eltolva tükrözések!

8) Milyen leképezések állnak elő síktükrözések kompozíciójaként?

9) Egybevágóság-e az egységvektorral való jobbról vektoriális szorzás leképezés!

10) Igazoljuk a ~~fe~~ 9) leképezésének a következő előállítását: 1) vetítsük a $\vec{OP}$ vektort az $\underline{v}$-re merőleges O-n átmenő síkra, 2) forgassuk el a vetületet az O-körül pozitív irányban 90°-al (szemben nézve $\underline{v}$-vel az síkra) azaz $\{\underline{v}, \vec{OP}, \vec{OP'}\}$ j.r. legyen

11) Írjuk fel az eltolás analitikus alakját inhomogén és homogén koordinátákkal

12) Írjuk fel egy A mátrixú geom. trafó homogén koordinátás alakját

13) Tekintsük a tér $\Big\{ \underbrace{\overset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \overset{e_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{B} \overset{e_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \Big\}$ bázisát

Írjuk fel ~~(2, 3, 4~~ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ koordinátáit vektort az $\{e_1, e_2, e_3\}$ bázisra vonatkozóan. ~~Mikor~~ lesz az új koordinátákkal ~~nézve~~, ~~mikor~~ hogy tudom ellenőrizni, hogy 2 vektor mikor merőleges?

$$B x_{\text{új}} = x_{\text{régi}} \qquad x_{\text{új}} = B^{-1} x_{\text{régi}}$$

$$u_{\text{régi}} \perp v_{\text{régi}} \iff \langle u_{\text{régi}} | v_{\text{régi}} \rangle = 0$$

$$u^T_{\text{régi}} v_{\text{régi}} = u^T_{\text{új}} B^T B v_{\text{új}}$$

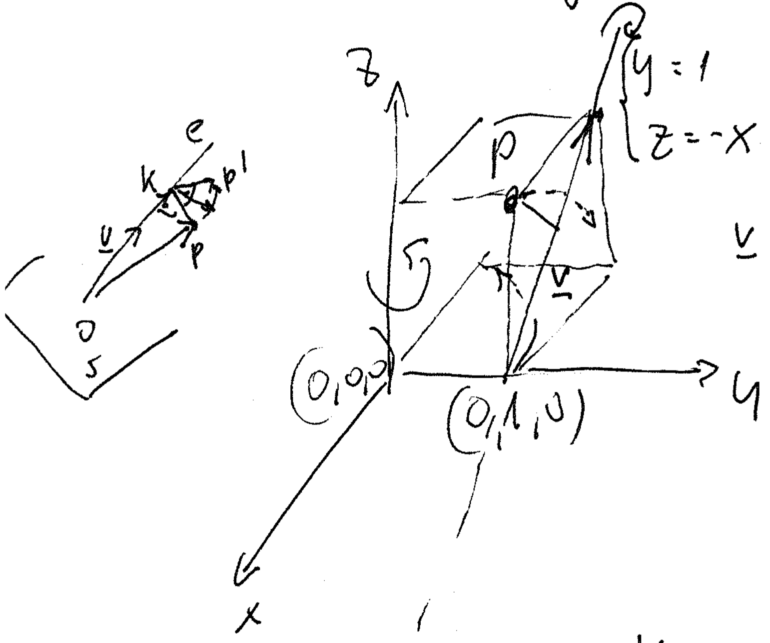
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' + v_2' + v_3' \\ v_1' + 2v_2' + 2v_3' \\ v_1' + 2v_2' + 3v_3' \end{pmatrix}$$

$$(u_1' \; u_2' \; u_3')$$

$$0 = u_1'(v_1' + v_2' + v_3') + u_2'(v_1' + 2v_2' + 2v_3') + u_3'(v_1' + 2v_2' + 3v_3')$$

15) Az $\frac{x}{-1} = y-1 = z$ $x=-z$ $y=1$ egyenes forog a 'z' tengely körül. Az egyenes körül forog a tőle $\frac{\sqrt{2}}{2}$ távolságra lévő P pont, melynek a kiindulási helyzete a $P\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. ~~[illegible]~~ Egyenlő idő alatt a két elfordulás egyenlő szöggel fordítja el az egyenest illetve a pontot. Hol van P $\alpha=60°$-os elfordulás után?



$$F_{\{0,0,1\}}(\alpha) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \left(F_{\{0,0,1\}}(\alpha)\right)\underline{v} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ -\sin\alpha\\ -1\end{pmatrix} = \underline{v}_\alpha$$

$$F_{\{0,0,1\}}(\alpha)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\\ 0\end{pmatrix} = O_\alpha$$

$$F_{\{0,0,1\}}(\alpha)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\\ 1\end{pmatrix} = P_\alpha$$

$$\underline{v}_\alpha^0 = \frac{\underline{v}_\alpha}{|\underline{v}_\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ -\sin\alpha\\ -1\end{pmatrix}$$

$$F_{\underline{v}_\alpha^0}(\alpha) = \left(\cos\alpha\, V_{s,\underline{v}_\alpha^0} + \sin\alpha\, V_{\underline{v}_\alpha^0,\times} + V_{e,\underline{v}_\alpha^0}\right)\overrightarrow{O_\alpha P_\alpha}$$

$$= \Bigg[\cos\alpha\begin{pmatrix}1-\frac{\cos^2\alpha}{2} & \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha & +\frac{1}{2}\cos\alpha\\ \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha & 1-\frac{\sin^2\alpha}{2} & -\frac{1}{2}\sin\alpha\\ +\frac{1}{2}\cos\alpha & -\frac{1}{2}\sin\alpha & \frac{1}{2}\end{pmatrix} +$$

(9)

$$+\sin\alpha\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{\sin\alpha}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{\cos\alpha}{\sqrt2} \\ -\frac{\sin\alpha}{\sqrt2} & -\frac{\cos\alpha}{\sqrt2} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha & \sin\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 1 \end{pmatrix}\Bigg]\,\overrightarrow{O_\alpha P_\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{\sqrt3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{\sqrt3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt3}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{\sqrt3}{2\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt2} \\ -\frac{\sqrt3}{2\sqrt2} & -\frac{1}{2\sqrt2} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt3}{2} & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{9}{8} & \frac{\sqrt3}{8}-\frac{\sqrt3}{\sqrt2}-\frac{\sqrt3}{4} & \frac{3}{2\sqrt2}-\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt3}{8}+\frac{\sqrt3}{\sqrt2}-\frac{\sqrt3}{4} & \frac{11}{8} & -\frac{\sqrt3}{4}+\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}+\frac{\sqrt3}{2} \\ -\frac{3}{2\sqrt2}-\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt3}{4}-\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}+\frac{\sqrt3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt2}-\frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt3}{4}+\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}+\frac{\sqrt3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt2-1}{8} \\ \sqrt3\,\frac{\sqrt2+1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

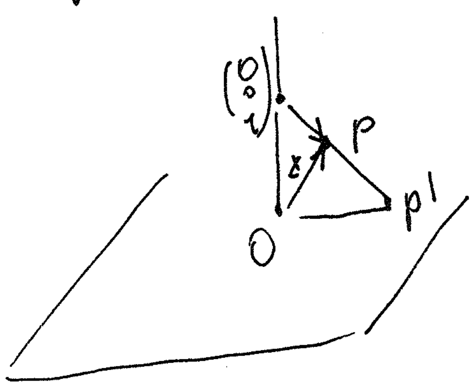
$$\overset{\shortparallel}{\overrightarrow{O_\alpha P'_\alpha}}$$

[illegible]

$$\overrightarrow{OP'_\alpha} = \overrightarrow{OO_\alpha} + \overrightarrow{O_\alpha P'_\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt2-1}{8} \\ \sqrt3\,\frac{\sqrt2+1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt3+3\sqrt2-1}{8} \\ \frac{\sqrt6+\sqrt3+2}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

16) Az $C(0,0,1)$ pontból végezünk centrális vetítést a $z=0$ -síkra. Adjuk meg a leképezés homogén koordinátákkal való leírását. 10



$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{1-z}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\frac{x}{1-z}\\\frac{y}{1-z}\\0\end{pmatrix} \qquad \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}\right] \longmapsto \left[\begin{pmatrix}\frac{x}{1-z}\\\frac{y}{1-z}\\0\\1\end{pmatrix}\right] =$$

$$[A] = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\\1-z\end{pmatrix} \qquad = \left[\begin{pmatrix}x\\y\\0\\1-z\end{pmatrix}\right]$$

17) Igazoljuk, hogy a fenti leképezés az O-közepű egységgömb köreit körökre vagy egyenesekre képezi le. (Sztereografikus projekció)

18, Adjunk az $[A]$ mátrixra olyan feltételt, hogy ~~inkongruens~~ egybevágóságot, hasonlóságot, affinitást indukáljon.

19) Hogyan állítható elő

a) a $(8,-13,7)^T$ pont a $(9,-1,3)^T$ és a $(1,12,-4)^T$ pontok lineáris kombinációjaként

b) a $(2,1,0)$ egyenes a $(9,15,-3)$ és $(4,-5,2)$ egyenesek lin. kombinációjaként?

c) Mit jelent ha két egyenes vonalkoordinátáinak lineáris kombinációja a harmadik vonalkoordinátája?

20) Az A, B, C, D, E pontok a számegyenes $-3, -1, 7, 10, \infty$ pontjai.

a) Mennyi a $(ABCD)$, $(DCAB)$, $(ABCE)$ kettősviszonyok értéke?

b) Melyik számoknak felelnek meg azok az X, Y pontok melyekre $(ABXD)=-2$ $(YBCE)=1$

21) Az $a=(-1,4,-2)$ $b=(-2,12,-9)$ $c=(3,2,1)$ és d egyenesekre $(abcd)=-1$. Mi a 'd' egyenes? Szerkeszd meg d-t, ha a, b, c helyette adott és $(abcd)=-1$.

22) A, B, C, D, E egy egyenes 5 pontja. Igazoljuk, hogy $(ABCD)(ABDE)=(ABCE)$

23) $ABC_\triangle$ csúcsait vetítsük a szemközti oldalakra egy adott P pontból (A', B', C') majd szerkesszük meg ezek A'', B'', C'' harmonikus társát. Igazoljuk hogy $\{A'', B'', C''\}$ kollineárisak

M.o.

19) a) $\left.\begin{aligned} 8 &= \alpha 9 + \beta \\ -13 &= -\alpha + 12\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow 8 = 117 + 108\beta + \beta \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\beta &= -1 \\ \alpha &= 1\end{aligned}}$

A harmadik koordináta is ~~akkor~~ nem stimmel így ✓

~~$7+3 = 4 \cdot 7 - 4$~~ $\Rightarrow$ ~~zéhogy~~ $7 = 3 - (-4)$

b) ~~Ezután úgy, a 2. koordináta 5-öt adhatja a másodikét kérem~~

$-3\alpha + 2\beta = 0 \qquad \alpha = \frac{2}{3}\beta$

és ~~zéhogy~~

$\frac{2}{3}\beta \cdot 15 - 5\beta = 1 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{5} \quad \alpha = \frac{2}{15}}$ ✓

c) $\underline{y} = \alpha \underline{u}_1 + \beta \underline{u}_2$, ha ~~$x \in$~~ X a két egyenes közös pontja, akkor $[\underline{x}] = X$ mivel $\underline{x}\underline{u}_1 = \underline{x}\underline{u}_2 = 0$ $\Rightarrow \underline{x}\underline{y} = 0$ így X a harmadik egyenesnek is pontja.

20) a) $(ABCD) = \frac{10}{-8} : \frac{13}{-11} = \frac{110}{104}$

b) $(ABXD) = \frac{x+3}{-1-x} : \frac{13}{-11} = \frac{-11x-33}{-13-13x} = -2 \qquad 11x + 33 = 26 + 26x$

$+15x = 7 \qquad x = \frac{7}{15}$

$1 = (YBCI) = -(YBC) = -\frac{7-y}{-8} \Rightarrow 8 = 7 - y \quad \boxed{y = -1}$

21) $c = \alpha a + \beta b \qquad -\alpha + -2\beta = 3 \qquad 4\alpha + 22\beta = 2$

$\alpha = -2\beta - 3 \sim -8\beta - 12 + 22\beta = 2$

$14\beta = 14$

$c = -5a + b$

$\boxed{\alpha = -5} \Leftarrow \boxed{\beta = 1}$

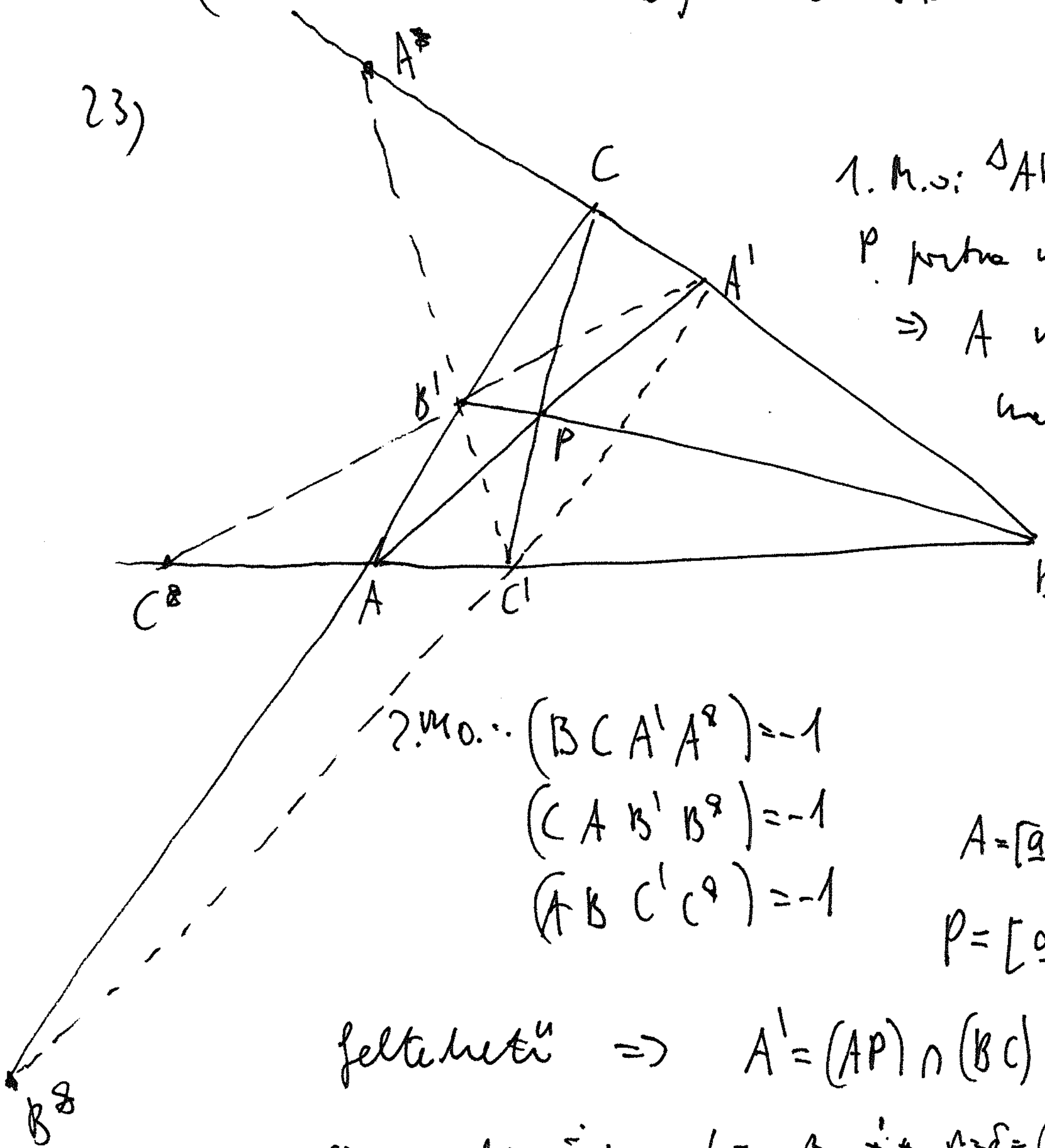
$(a, b, c, d) = \frac{1}{-5} : \frac{\delta}{\mu} = -1$

$\mu = 5\delta \quad \delta = 1 \quad \mu = 5 \quad d = (-7, 42, -19)$ ell: $(-2)(-5) - 9 = 1$ ✓

22)

$$\left(\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}\right)\left(\frac{AD}{DB} : \frac{AE}{EB}\right) = \frac{AC}{CB} : \frac{AE}{EB} = (A\,B\,C\,E)$$

23)



2. m.o.: $(B\,C\,A'\,A^*) = -1$

$(C\,A\,B'\,B^*) = -1$

$(A\,B\,C'\,C^*) = -1$

Desargues tétel

1. m.o.: $\triangle ABC$ $\triangle A'B'C'$

P pontra nézve perspektívak $\Rightarrow$ A megfelelő oldalak metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek

$AB \cap A'B' = C^*$

$BC \cap B'C' = A^*$

$CA \cap C'A' = B^*$

$A = [\underline{a}]$ $B = [\underline{b}]$ $C = [\underline{c}]$

$P = [\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}]$ [illegible]

feltételből $\Rightarrow$ $A' = (AP) \cap (BC)$ $\alpha \underline{a} + \beta(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) = \gamma \underline{b} + \delta \underline{c}$

egyenlítés alapján $\alpha = -\beta$ és $\gamma = \delta = \beta$ $\Rightarrow$ $A' = [\underline{b} + \underline{c}]$

Hasonlóképpen $B' = [\underline{a} + \underline{c}]$ $C' = [\underline{a} + \underline{b}]$. így $A^* = \beta \underline{b} + \mu \underline{c}$

$-1 = (B\,C\,A'\,A^*) = \frac{1}{1} : \frac{\mu}{\beta}$ $\Rightarrow$ $A^* = [\underline{b} - \underline{c}]$ hasonlóképpen

$B^* = [\underline{c} - \underline{a}]$ és $C^* = [\underline{a} - \underline{c}]$ ami $(\underline{b} - \underline{c}) + (\underline{c} - \underline{a}) + (\underline{a} - \underline{c}) = 0$

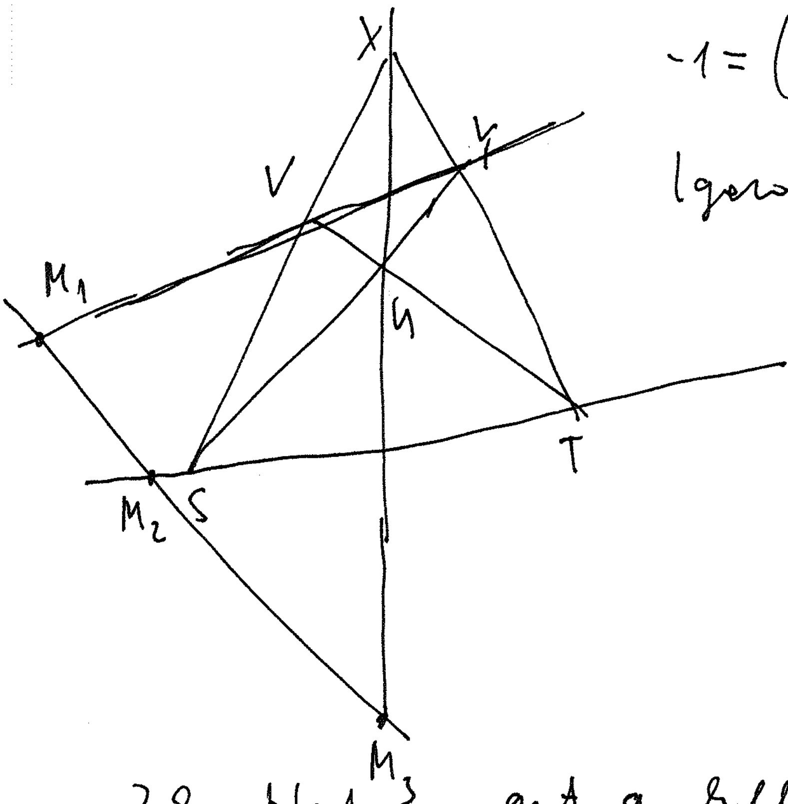
alapján $\{A^*, B^*, C^*\}$ kollineárisak.

25) A centrális-axiális kollineációnak $C=[\underline{c}]$ a centruma, t tengelyének homogén koordinátái $[\underline{t}^T]$. Mi a leképezés analitikus alakja?

26) Bizonyítsuk be Menelaos tételét: Ha egy e egyenes az $ABC_\triangle$ oldalegyeneseit $A'=e\cap BC$, $B'=e\cap AC$ és $C'=e\cap AB$ pontokban metszi, akkor

$$(ABC')(BCA')(CAB')=-1.$$

27) Egy teljes négyoldal átlós egyeneseit egy 4. egyenes az M_1, M_2, M_3 pontokban metszi



$$-1=(VYM_1M_1')=(XUM_3M_3')=(STM_2M_2')$$

Igazoljuk, hogy $\{M_1', M_2', M_3'\}$ is kollineáris.

28) Határozzuk meg azt a kollineációt, mely az E_1, E_2, E_3, E alappontokat a $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$ pontokba viszi (ebben a sorrendben)

29.* Közös tengellyel bíró C-a kollineációk csoportot alkotnak

30.* Közös tengelyű elációk kommutatív csoportot alkotnak

31. Az $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ lineáris transzformációk akkor és csak akkor adják u. azt a kollineációt a projektív síkon, ha $B^{-1} \circ A = \lambda\, \mathrm{id}$ (vagy $A = \lambda B$) valamely $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ számmal

32. Bizonyítsuk be, hogy az identitástól különböző C-a kollineációnak nem lehet
a) két tengelye b) két centruma
c) a centrumon és tengelyen kívül fixpontja
d) a centrumra nem illeszkedő fixegyenese

33. A C-K modell az egységkörlapon adott körlapú sík. a) Határozzuk meg a $P\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ pontok távolságát

b) Egybevágó-e a hiperbolikus síkon $ABC_\triangle$ és $A'B'C'_\triangle$ illetve $A''B''C''_\triangle$ -ei?
$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{16} \end{pmatrix}$

$A'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B'\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $C'\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{16} \end{pmatrix}$

$A''\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ $B''\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ $C''\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{16} \end{pmatrix}$

25) $C=[\underline{c}]$ $t=[\underline{t}^T]$ ← koordinátáival (vektorok) a centrum és a tengely.

Mivel $X=[\underline{x}]$ és képe $X'=[\underline{x}']$ összekötő egyenese tartalmazza a C pontot

$\underline{x}' = \underline{x} + \lambda(\underline{x})\,\underline{c}$ összefüggés feltételező a homogén koordinátákat reprezentáló számhár-mas szorzót. Ha a leképezés fixpontja $\underline{x}$, akkor $\lambda(\underline{x})$-nek el kell tűnnie $\underline{x}$-n. A t tengely pontjai fixpontok, ezért $\lambda(\underline{x}) = \lambda\langle \underline{t}^* | \underline{x}\rangle = \lambda\,\underline{t}^T\cdot\underline{x}$ feltételező, ahol $\lambda\in\mathbb{R}$ valós szám. Az általános alak tehát $\boxed{\underline{x}' = \underline{x} + \lambda(\underline{t}^T\cdot\underline{x})\,\underline{c}}$ kivéve a homogén reprezentánsokat. Ha adott egy P, P' összetartozó pontpár a $\underline{p}, \underline{p}'$ reprezentánsokkal, akkor azt behelyettesítve $\varrho\underline{p}' = \underline{p} + \lambda(\underline{t}^T\cdot\underline{p})\,\underline{c}$ egyenletekből λ és ϱ meghatározható. Pld. $\underline{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\underline{t}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$\underline{p}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. $\underline{p}'$ választásánál figyelni kell arra, hogy $\{\underline{c},\underline{p},\underline{p}'\}$ kollineáris legyen pld $\underline{p}'=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ jó.

A kollineáció $\begin{pmatrix}\varrho\\0\\\varrho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda(2)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\varrho\\0\\\varrho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda\\2\lambda+1\\2\lambda\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\boxed{\lambda=-\frac{1}{2}}$ $\boxed{\varrho=-1}$ és a leképezés $-\underline{x}' = \underline{x} - \frac{1}{2}\cdot(3x+2y+z)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x+\frac{3}{2}x+y+\frac{1}{2}z\\-y+\quad〃\\-z+\quad〃\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right]$

~~8. óra~~ (2021)

-17-

27, Legyen $U=[\underline{x}+\underline{y}+\underline{v}]$, ahol $X=[\underline{x}]$ $Y=[\underline{y}]$ és $V=[\underline{v}]$.

$M_1=[\underline{y}+\lambda\underline{v}]$ $\quad M_3=\cancel{[\mu\underline{x}+\mu\underline{v}]}=[(1+\mu)\underline{x}+\underline{y}+\underline{v}]$

S számítása: $\quad \underline{x}+\alpha\underline{v}=\rho(\underline{y}+\beta(\underline{x}+\underline{y}+\underline{v}))\Rightarrow\beta=-1$

$\alpha=1\ \rho=-1\Rightarrow S=[\underline{x}+\underline{v}]$

T számítása: $\quad \underline{x}+\alpha\underline{y}=\rho(\underline{v}+\beta(\underline{x}+\underline{y}+\underline{v}))\Rightarrow\beta=-1\ \rho=-1$

és $\quad T=[\underline{x}+\underline{y}]$

$M_1'=[\underline{y}+\lambda'\underline{v}]$ de $(Y\,V\,M_1M_1')=-1\Rightarrow\lambda'=-\lambda\Rightarrow$

$M_1'=[\underline{y}-\lambda\underline{v}]$

$M_3'=\cancel{[\underline{x}-\mu\underline{v}]}=[(1-\mu)\underline{x}+\underline{y}+\underline{v}]$

$M_2=[(\underline{x}+\underline{v})+\nu(\underline{x}+\underline{y})]\Rightarrow M_2'=[(\underline{x}+\underline{v})-\nu(\underline{x}+\underline{y})]$

$\{M_1M_2M_3\}$ kollineáris $\Rightarrow 0=\det[\underline{y}+\lambda\underline{v},(\underline{x}+\underline{v})+\nu(\underline{x}+\underline{y}),\underline{x}+\mu\underline{x}]=$

$\{\underline{x},\underline{y},\underline{v}\}$ koordinátarendszer

$=\det[\underline{y}+\lambda\underline{v},\underline{x}(1+\nu)+\underline{v}+\nu\underline{y},(1+\mu)\underline{x}+\underline{v}+\underline{y}]=$

$=\det\begin{pmatrix}0&1+\nu&1+\mu\\1&\nu&1\\\lambda&1&1\end{pmatrix}=-1-\nu+1+\mu+\lambda(1+\nu)-\lambda\nu(1+\mu)=\mu-\nu+\lambda-\lambda\mu\nu$, míg az $\{M_1'M_2'M_3'\}$-re teljesül

determináns

$\det\begin{pmatrix}0&1-\nu&1-\mu\\1&-\nu&+1\\-\lambda&1&+1\end{pmatrix}=-1+\nu+1-\mu-\lambda(1-\nu)+\lambda(1-\mu)(-\nu)=$

$=\nu-\mu-\lambda+\cancel{\lambda\nu}-\cancel{\lambda\nu}+\lambda\mu\nu=-(\mu-\nu+\lambda-\lambda\mu\nu)=0$

28) kell $A(E_i) = P_i$ $\quad E_i = [e_i]$ $\quad E = [e_1 + e_2 + e_3]$

$A(E) = P$ $\quad P_1 = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$ $\quad P_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ $\quad P_3 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$

Olyan A-t keresünk, melyre $\quad p = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$

$A e_i = [\lambda_i p_i]$ $\quad A\underline{e} = \lambda p$

Feltehetjük $\lambda_1 = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$A = \begin{pmatrix} 2 & a_{12} & a_{13} \\ 3 & a_{22} & a_{23} \\ 4 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ és így $A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 3 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ 4 & \lambda_2 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$ adódik figyelembe

véve az $\{e_2, p_2\}$ $\{e_3, p_3\}$ párokat. Ebből az $\{\underline{e}, p\}$

pár segítségével

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 3 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ 4 & \lambda_2 & -\lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda \\ \lambda \\ 4\lambda \end{pmatrix}$$ adódjék

az
$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad 2 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4\lambda \\ &(2)\quad 3 - \lambda_2 - \lambda_3 = \lambda \\ &(3)\quad 4 + \lambda_2 - \lambda_3 = 4\lambda \end{aligned}\right\}$$
e. rendszer adódik, így $\overset{(3-1)}{2} - 2\lambda_3 = 0$

$\boxed{\lambda_3 = 1} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2 - \lambda_2 &= \lambda \\ 3 + \lambda_2 &= 4\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$ és végül $\boxed{\lambda_2 = 1}$

adódik. A keresett leképezés a

$$\left[g \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right]$$ lineáris transzformáció mátrix által

indukált kollineáció.

29*) A kompozíció tengelye megegyezik a két c-a kollineáció közös tengelyével, azaz a kompozíció tengellyel rendelkező kollineációt ad, így a műveletre zárt a halmaz. A 25) feladat alapján a tengely – centrum és egy pont a képével meghatározza a c-a kollineációt. (A Desargues-tétel felhasználásával ez mutatható is, ahogy látható) Az inverzét a $\{t, C, P, P'\}$ c-a kollineációnak a $\{t, C, P', P''=P\}$ (ami az első leképezésnél $P \mapsto P'$, az inverznél $P' \mapsto P$) c-a kollineáció adja. Az egység-elem a sík identitása. Az asszociativitás közvetlen, adódik, hogy a kollineációk csoportot alkotnak.

30*) Def: Elációnak nevezzük a c-a kollineációt ha a centrum illeszkedik a tengelyre.
Mivel a kompozíció centruma (közös tengelyű c-a kollineációknál) illeszkedik az önmaguk centrumainak egyenesére, eláció elem a kettő elációt adnak. Ami a közös tengelyű elációk zárnak u.i. ezen tengelyű eláció. Legyenek φ és ψ t tengelyű C_φ, C_ψ centrum elációk. $\boxed{\text{Belátjuk, hogy a } (\psi^{-1}\circ\varphi\circ\psi) \text{ leképezés centruma a } \psi(C_\varphi) \text{ pont}}$ tetszőleges ψ kollineáció esetén. Legyen

'e' tehát egyenes $\Psi(C_\varphi)$-n keresztül. Ez
valamely 'f' C_φ-n keresztül menő egyenes képe, amire
$e = \Psi(f)$, de f invariáns a φ leképezésre
azaz $\varphi(f) = f$. Így $\Psi\circ\varphi\circ\Psi^{-1}(e) = \Psi\circ\varphi(\Psi^{-1}(\Psi(f)))$
$= \Psi\circ\varphi(f) = \Psi(f) = e$ miatt e invariáns a
$(\Psi\circ\varphi\circ\Psi^{-1})$ leképezésre $\Rightarrow$ ennek a centruma $\Psi(C_\varphi)$.
Visszatérve az előzőre, ha Ψ, φ-vel azonos tengelyű
elforgatás, akkor $\Psi\circ\varphi\circ\Psi^{-1}$ centruma $\Psi(C_\varphi) = C_\varphi$
hiszen C_φ a Ψ's tengelyén van. ~~Hasonlóképpen~~ Nyil-
ván C_φ a φ^{-1} leképezésnek is centruma, ezért C_φ
centruma $\Psi\circ\varphi\circ\Psi^{-1}\circ\varphi^{-1}$ leképezésnek. Hasonlókép-
pen $(\varphi\circ\Psi^{-1}\circ\varphi^{-1})$ leképezésnek centruma a $\varphi(C_{\Psi^{-1}}) =$
$= \varphi(C_\Psi) = C_\Psi$ pont, ezért $\Psi\circ\varphi\circ\Psi^{-1}\circ\varphi^{-1}$-nek centruma
C_Ψ. Ha $C_\varphi \neq C_\Psi$, akkor az 32, feladat b)-re
nézve az identitás azaz $(\Psi\circ\varphi)\circ(\varphi\circ\Psi)^{-1} = id$ $\Leftrightarrow$
$\Psi\circ\varphi = \varphi\circ\Psi$. ~~Ha~~ $\cancel{C_\varphi = C_\Psi}$, akkor ~~pedig az~~
állítás ~~igazolásához tekintsük egy olyan felezését~~
~~hegyes a centrum~~ $\cancel{C_\xi}$ ~~különbözik~~ $\cancel{C_\varphi = C_\Psi}$~~-től.~~ $\cancel{\xi\circ\varphi}$
~~felcserélhető φ-vel és Ψ-vel is~~ Legyen most ξ egy
~~amely centruma~~
C_φ centrumú elforgatás (továbbá is $C_\varphi \neq C_\Psi$) a
fentiek szerint $\xi\circ\varphi$ centruma sem C_φ sem C_Ψ

mert ez felcserélhető φ-vel és ψ-vel is. (21)

Belátjuk, hogy ξ is felcserélhető φ-vel. Tekintsük

u.i. $(\varphi\circ\xi)\circ\psi = \varphi\circ(\xi\circ\psi) = (\xi\circ\psi)\circ\varphi = \xi\circ(\psi\circ\varphi) =$

$= \xi\circ(\varphi\circ\psi) = (\xi\circ\varphi)\circ\psi$

a tekintés mert, meg~~szor az~~ből $(\varphi\circ\xi)\circ\psi = (\xi\circ\varphi)\circ\psi$

$\Leftrightarrow \varphi\circ\xi = \xi\circ\varphi$ következik

31) Legyen a projektív koordinátarendszer alappontjai $E_1\ E_2\ E_3\ E$, az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e} = \underline{e}_1+\underline{e}_2+\underline{e}_3$ reprezentánsokkal. A $B^{-1}\circ A$ leképezés az alappontokat adja saját magába, ha

$(B^{-1}\circ A)(\underline{e}_i) = \lambda_i \underline{e}_i \quad i=1,2,3 \quad (B^{-1}\circ A)\underline{e} = \lambda \underline{e}$ egyenlőségek egyszerre teljesülnek. Az utóbbiból

$$(B^{-1}\circ A)(e_1+e_2+e_3) = \lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3$$

$$\|$$

$$\lambda e_1+\lambda e_2+\lambda e_3$$

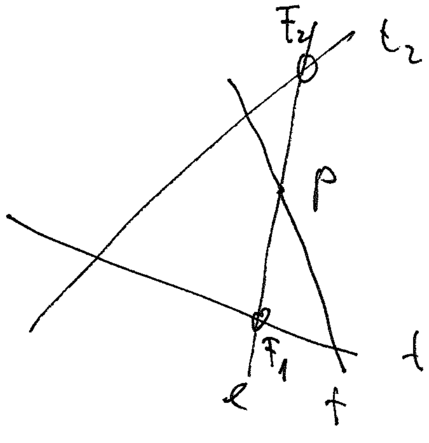
kell, hogy teljesüljön a linearitás miatt, de az egyértelmű előállítás miatt $\Rightarrow 0\neq\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$

így $(B^{-1}\circ A)(\underline{x}) = (B^{-1}\circ A)(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (B^{-1}\circ A)(e_i) = \lambda\cdot\underline{x}$

ahonnan $B^{-1}\circ A = \lambda\, id$.

8

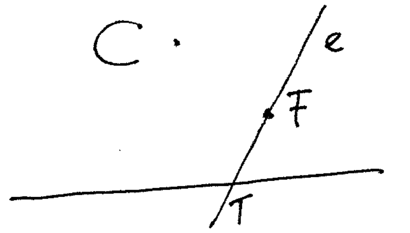
32) a) $t_1 \nparallel t_2$ tengelyek $\Rightarrow P \notin t_1 \cup t_2$. Legyen e, f két egyenes P-n keresztül. Mivel



ezeken 2-2 fixpont van ezek invariáns egyenesek, de két invariáns egyenes metszéspontja (P) is fixpont

b) u. igy

c)

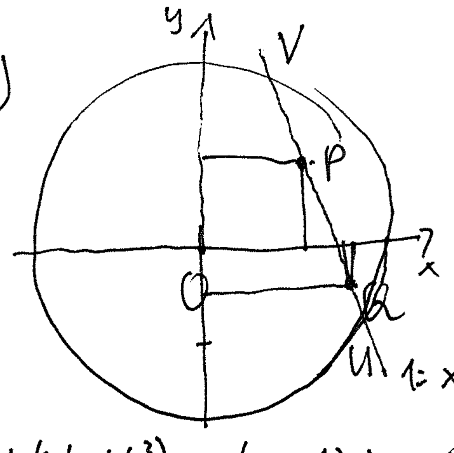


$C \neq F$ fixpont, $C \notin t$ $\Big\} \Rightarrow$

e egyes invariáns egyenes F-en keresztül, mert 2 fixpont van rajta, ha $F \notin t$, de akkor $F \neq C$ két centrum ↯ b)

d) u. igy.

33) a)



$P\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $Q\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$1 = x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} + t\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}t\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{16}\left[(4 + 4t + t^2) + 4 - 12t + 9t^2\right] = \frac{1}{16}\left[8 - 8t + 10t^2\right] \Rightarrow$$

$$0 = 10t^2 - 8t - 8 \iff 0 = 5t^2 - 4t - 4$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 5\cdot 16}}{10} = \frac{4 \pm 4\sqrt{5}}{10} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{5}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{2-2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} + \frac{2-2\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{3}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{10} \\ \frac{1}{2} + \frac{-3+3\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix} \qquad \sqrt{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{10} \\ \frac{1}{2} + \frac{-3-3\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$$

$$|PU| = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{10}\right)^2 + 9\left(\frac{1-\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \sqrt{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$|PV| = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^2 + 9\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \sqrt{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$(PQUV) = \left(\frac{|PU|}{-|UQ|} : \frac{-|PV|}{+|VQ|}\right) = \left(\frac{|PU|}{|UQ|} : \frac{|PV|}{|VQ|}\right) = \left(\frac{|PU|}{|PV|} : \frac{|UQ|}{|VQ|}\right) \Rightarrow$$

$$|\overline{UQ}| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1-\sqrt{5}}{10} \\ \frac{3}{4} - 3\frac{(1-\sqrt{5})}{10} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{-3-2\sqrt{5}}{20}\right)^2 + \left(\frac{9+6\sqrt{5}}{20}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{20}\sqrt{9 + 12\sqrt{5} + 20 + 81 + 108\sqrt{5} + 180} = \frac{1}{20}\sqrt{290 + 120\sqrt{5}}$$

$$|\overline{VQ}| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{10} \\ \frac{3}{4} - 3\frac{1+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{-3+2\sqrt{5}}{20}\right)^2 + \left(\frac{9-6\sqrt{5}}{20}\right)^2} =$$

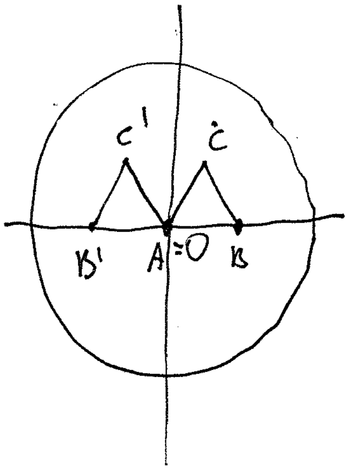
$$= \frac{1}{20}\sqrt{9 - 12\sqrt{5} + 20 + 81 - 108\sqrt{5} + 180} = \frac{1}{20}\sqrt{290 - 120\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{2}\ln(PQUV) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} : \sqrt{\frac{290+120\sqrt{5}}{290-120\sqrt{5}}}\right)$$

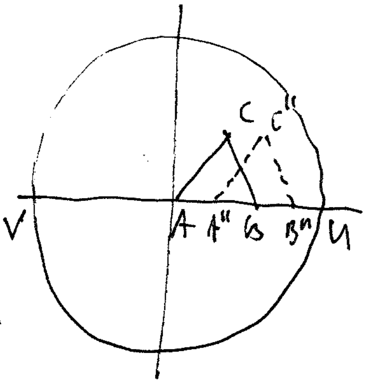
[illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] is lehet [illegible], de nem kell

b) $ABC_\triangle \cong A'B'C'_\triangle$, mert mint lehet hogyha az O-n átmenő egyenesre tükrözés a hiperbolikus síkra is tükrözést valósít meg, ami egybevágóság.



$ABC_\triangle \not\cong A''B''C''_\triangle$, mert



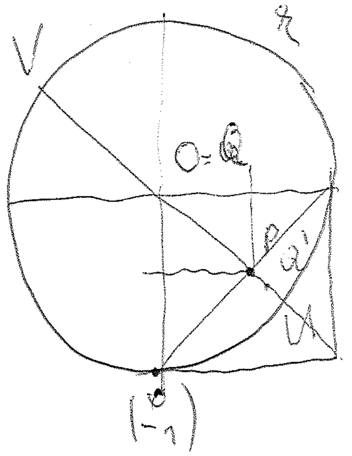
$$\varrho(AB) = \frac{1}{2}\ln(ABUV) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}} : \frac{-1}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln 3$$

$$\boxed{\varrho(A''B'')} = \frac{1}{2}\ln(A''B''UV) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}} : \frac{-1}{\frac{7}{4}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{21}{8} \neq \frac{1}{2}\ln\frac{21}{7} = \frac{1}{2}\ln 3 = \boxed{\varrho(AB)}$$

Feladat:

34) A C-K modell az $\{x,y\}$ sík egységkörre lapos fel a $\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ végtelen távoli pontokon keresztülhaladó egyenesre vonatkozó ~~tükrözés~~ hiperbolikus tükrözés szerinti képét az $P\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ~~pontnak~~ illetve $Q\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ pontnak



Mo: Az egyenes a $\left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ pontokat összekötő Euklideszi egyenes szakasz belső darabja. A P illeszkedik rá, így $P'=P$. Legyen a $O=Q\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ képe Q'. Mivel ~~K≠~~ az egyenes pólusa a $K\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ pont, ezért a K-t Q-val összekötő egyenes a modell középpontján áthaladó egyenes. Ennek 'q'-val vett metszéspontjai $U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$V=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$. kell $(PQVU)=(Q'PVU)$

$$(PQVU)=\frac{PV}{VQ}:\frac{PU}{UQ}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt2}}{-1}:\frac{\frac{1}{\sqrt2}-1}{1}=\frac{\sqrt2+1}{\sqrt2-1}$$

$\boxed{\cancel{K=\frac{1}{k}}}$

$$(Q'PVU)=\frac{Q'V}{VP}:\frac{Q'U}{UP}=\cancel{\frac{x+1}{-1-\frac{1}{\sqrt2}}:\frac{x-1}{2}=\frac{2(x+1)}{(1-x)\frac{1+\sqrt2}{\sqrt2}}=\frac{2\sqrt2(x+1)}{(1-x)(1+\sqrt2)}}$$

lásd a befejezést a 28. oldalon

$\cancel{\Rightarrow \sqrt2-\sqrt2x+1-x=2x+\sqrt2-\sqrt2x-\sqrt2 \Rightarrow 3x=2\sqrt2-1 \;\Big|\; x=\frac{2\sqrt2-1}{3}}$

$\cancel{Q'=\begin{pmatrix}q\\-q\end{pmatrix}\quad 2q^2=\frac{8+1-4\sqrt2}{9}\Rightarrow q^2=\frac{(2\sqrt2-1)^2}{18}\Rightarrow q=\frac{2\sqrt2-1}{3\sqrt2}=\frac{4-\sqrt2}{6}=\frac{2-\sqrt2}{3}}$

$$\cancel{Q' = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}}.$$

$\boxed{\text{lásd: részletek}}$ (28. oldalon)

35) Írjuk fel a $t = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ tengelyű $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ centrumú kollineációt, ha az $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ pontot a $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ pontba viszi.

Megoldás:

A korábbi előállítással

$$\left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}\right] + q\left(t_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + t_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + t_3\right)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

ahol t vektorkoordinátái (t_1, t_2, t_3). A t_1, t_2, t_3 hármasra fennáll $-t_2 + t_3 = 0$, $t_1 + t_3 = 0$ mert az egyenes átmegy a $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ pontokon. Így $-t_1 = t_2 = t_3$ alapján $[(-1, 1, 1)]$ az egyenes. Reprezentánsokra áttérve

$$\rho\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} + k(-\sqrt{2}+1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ egyenletrendszert

$\rho = 1 + (1-\sqrt{2})k$ illetve $-\frac{1}{\sqrt{2}}\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} + (1-\sqrt{2})k$ adódik

ahonnan $-\frac{1}{\sqrt{2}}(\rho+1) = (1-\sqrt{2})k$ így $\rho - 1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\rho+1) \Rightarrow$

$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\rho = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\rho = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$ így $(1-\sqrt{2})q = \rho - 1 =$

$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - 1 = \frac{-2}{\sqrt{2}+1}$ $\boxed{q = +2}$. A kollineáció mátrixa a

$$\rho\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} + q(\cancel{t_1} - x + y + 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1-q) + qy + q \\ qx + (1-q)y - q \\ -qx + qy + 1 + q \end{pmatrix}$$ egyenlet

rendszerből $\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

36) Igazoljuk, hogy a fenti leképezés a $Q=\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$ pontot a $Q'=\left[\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}\right]$ pontba viszi

37) Írjuk fel a ~~fenti~~ az egységkörön definiált Poincaré modellben az $e=\left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ két végű pontokat összekötő hiperbolikus egyenes Euklideszi egyenletét

Most körrel, mely középpontja $K=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ pont sugara $r=1$ $\Rightarrow$ $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ (x-1)^2+(y+1)^2=1,\ 0\leq x\leq 1,\ -1\leq y\leq 0\right\}$

38) Határozzuk meg 2 nem metsző körrel hatványvonalát.

39) Írjuk fel a $K=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ középpontú $r=1$ sugarú körre vonatkozó inverzió egyenletét. Határozzuk meg az inverziónál a következő pontok képét, $O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $U=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. Mi lesz az O-középpontú egységkör képe?

40) Igazoljuk, hogy a körre vonatkozó inverzió kört körbe vagy egyenesbe visz, egyenest egyenesbe vagy körbe és a görbék hajlásszögét őrzi

41) Szerkesszük meg egy pont inverz képét, ha adott az alapkör

34) feladat ugyanúgy ~~kikötjensen~~ ~~(...)~~

$x = QQ'$

$$\frac{\sqrt2+1}{\sqrt2-1} = (PQVU) = (Q'PVU) = \frac{Q'V}{VP} : \frac{Q'U}{UP} =$$

$$= \frac{-x-1}{1+\frac{1}{\sqrt2}} : \frac{1-x}{\frac{1}{\sqrt2}-1} = \frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt2}\right)(x+1)}{\left(1+\frac{1}{\sqrt2}\right)(1-x)} = \frac{(\sqrt2-1)(x+1)}{(\sqrt2+1)(1-x)}$$

$$(3+2\sqrt2)(1-x) = (3-2\sqrt2)(x+1)$$

$$\cancel{3} - 3x + 2\sqrt2 - \cancel{2\sqrt2 x} = 3x + \cancel{3} - \cancel{2\sqrt2 x} - 2\sqrt2$$

$$4\sqrt2 = 6x$$

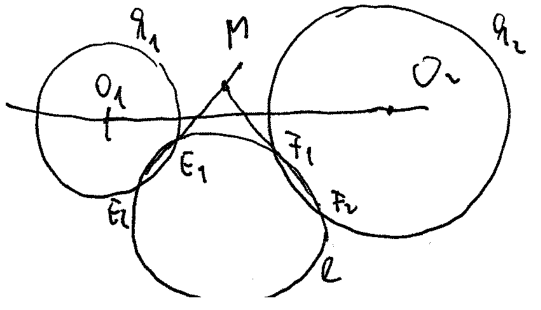
$$\frac{2\sqrt2}{3} = x \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q' = \begin{pmatrix} q \\ -q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt2} \\ -\frac{x}{\sqrt2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}}$$

36)

$$\frac{1}{(\sqrt2-1)^2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\sqrt2-1)^2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Q' = \left[\frac{1}{(\sqrt2-1)^2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right] \checkmark$$

38) Legyen a két kör k_1 és k_2, az O_1, O_2 középpontúak. Ugyanis a hatványvonal ~~[illegible]~~ szimmetrikus az O_1O_2 egyenesre. Legyen l olyan kör, mely k_1-et k_2-t 2–2 pontban metszi (E_1, E_2 ; $F_1 F_2$)

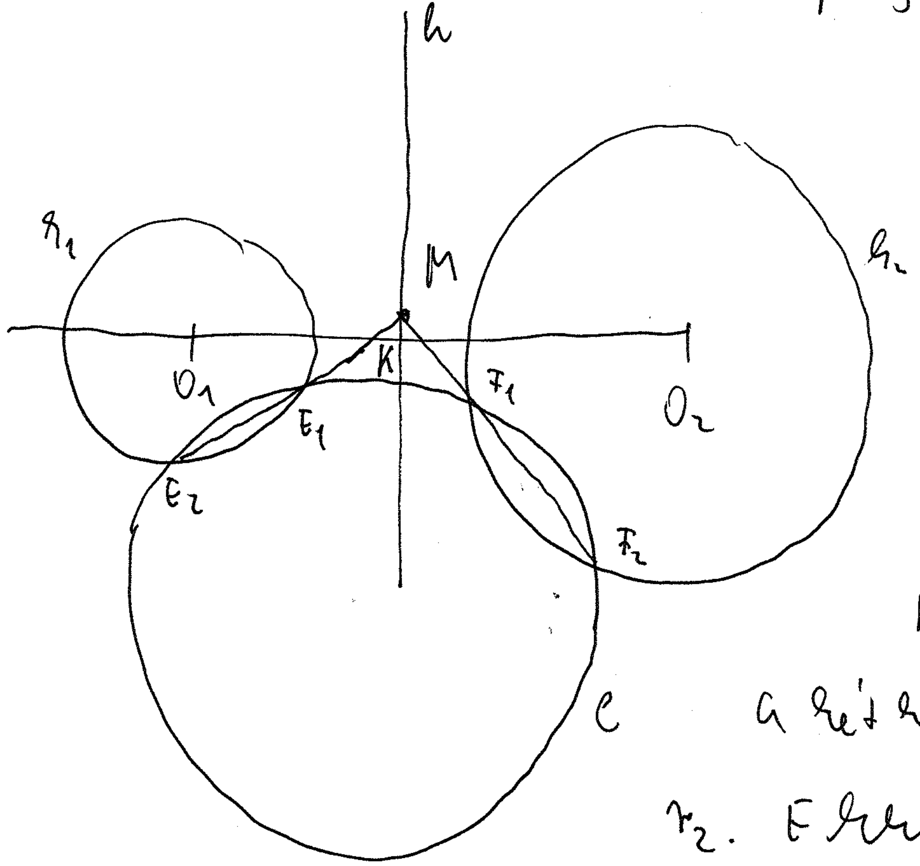


az $E_1E_2 \cap F_1F_2 = M$

pontra $ME_1 \cdot ME_2 =$

$= MF_1 \cdot MF_2 =$ M-nek

l-re merőleges helyzetű $\Rightarrow$ M a k_1, k_2 hatványvonalának a pontja. Tekintsük az M-ből O_1O_2-re állított merőleges egyenest, mert K minden pontját a (O_1O_2) egyenessel. Legyen $|O_1O_2| = d$, a k_1, k_2, l-re merőleges helye a M pontnak ϱ és a két kör sugara r_1 és r_2. Ekkor



$|MO_1|^2 = r_1^2+\varrho^2$ $\quad |MO_2|^2 = r_2^2+\varrho^2$ $\quad |O_1K|^2 = r_1^2+\varrho^2-|MK|^2$

$|O_2K|^2 = r_2^2+\varrho^2-|MK|^2$ és $|O_1K|+|O_2K| = d$

$|O_2K|^2-|O_1K|^2 = r_2^2-r_1^2$

$(|O_2K|-|O_1K|)(|O_1K|+|O_2K|) = (|O_2K|-|O_1K|)d \Rightarrow$

$|O_2K| = \frac{r_2^2-r_1^2}{d}+|O_1K|$ ami a K pont helyzete független az l kör választásától és a M pontétól, ezért a fenti módszerrel szerkesztett M pontok a h-egyenesre esnek. Fordítva legyen M tetszőleges pontja a

Egyenes. Ahm

$$|MO_2|^2 = |O_2K|^2 + |MK|^2 = \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{d} + |O_1K|\right)^2 + |MK|^2 =$$

$$= \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{d}\right)^2 + 2\,\frac{r_2^2 - r_1^2}{d}|O_1K| + |O_1K|^2 + |MK|^2 =$$

$$= \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{d}\right)^2 + 2\,\frac{r_2^2 - r_1^2}{d}|O_1K| + |MO_1|^2$$

hiszen $d = |O_1K| + |O_2K| = 2|O_1K| + \frac{r_2^2 - r_1^2}{d}$ alapján ⊙

$$\boxed{|O_1K| = \frac{d^2 - (r_2^2 - r_1^2)}{2d}}$$, ezért

$$|MO_2|^2 = \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{d}\right)\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{d} + \frac{d^2 - (r_2^2 - r_1^2)}{d}\right) + |MO_1|^2 =$$

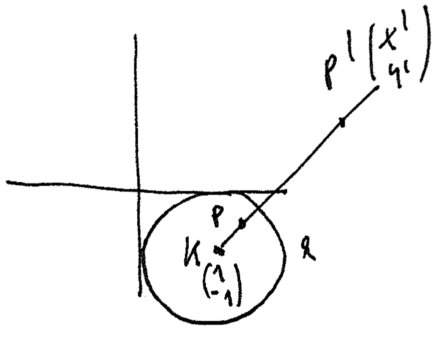
$$= \frac{r_2^2 - r_1^2}{d}(\cdot d) + |MO_1|^2 = (r_2^2 - r_1^2) + |MO_1|^2$$

Ha ϱ_1 az M-ből a k_1 körhöz húzott érintőszakasz hossza, ϱ_2 az M-ből a k_2 —||— hossza,

akkor $r_2^2 + \varrho_2^2 = |MO_2|^2 = (r_2^2 - r_1^2) + |MO_1|^2 = (r_2^2 - r_1^2) + r_1^2 + \varrho_1^2$

$\Rightarrow \varrho_1 = \varrho_2$ így M a hatványvonal pontja.

39)



$$t\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad t > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 + t(x-1) \\ -1 + t(y+1) \end{pmatrix}$$

$$\cancel{(1 + t(x-1))^2 + (-1 + t(y+1))^2 = \frac{1}{(x-1)^2 + (y+1)^2}}$$

$$|KP'| = t\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$$

$$|KP^*| = \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$$

$$1 = |KP|\,|KP'| = t\left((x-1)^2+(y+1)^2\right) \qquad t = \frac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x-1}{(x-1)^2+(y+1)^2} + 1 \\ y' &= \frac{y+1}{(x-1)^2+(y+1)^2} - 1 \end{aligned}}$$

O képe $O' = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}+1 \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

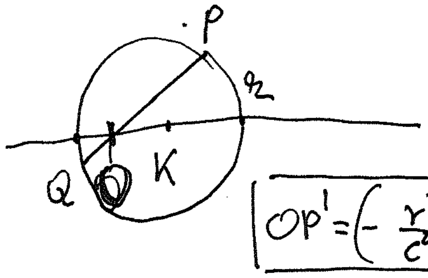
$$\left(-\frac{1}{\sqrt2}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt2}+1\right)^2 = \frac{2(\sqrt2+1)^2}{2} = (\sqrt2+1)^2$$

$$Y' = \begin{pmatrix} \dfrac{-\frac{1}{\sqrt2}-1}{\left(-\frac{1}{\sqrt2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt2}+1\right)^2} + 1 \\ \dfrac{\frac{1}{\sqrt2}+1}{\left(-\frac{1}{\sqrt2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt2}+1\right)^2} - 1 \end{pmatrix} = \left(\cancel{\frac{\sqrt2+1}{(\sqrt2+1)^2}} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt2+1}{\sqrt2(\sqrt2+1)^2} + 1 \\ \dfrac{\sqrt2+1}{\sqrt2(\sqrt2+1)^2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2+\sqrt2} + 1 \\ \dfrac{1}{2+\sqrt2} - 1 \end{pmatrix}$$

Az 'O' körüli egységkör merőleges az inverziós alapkörre így képe sajátmaga.

40) Csak az az eset maradt, amikor O az inverziós kör belső pontja

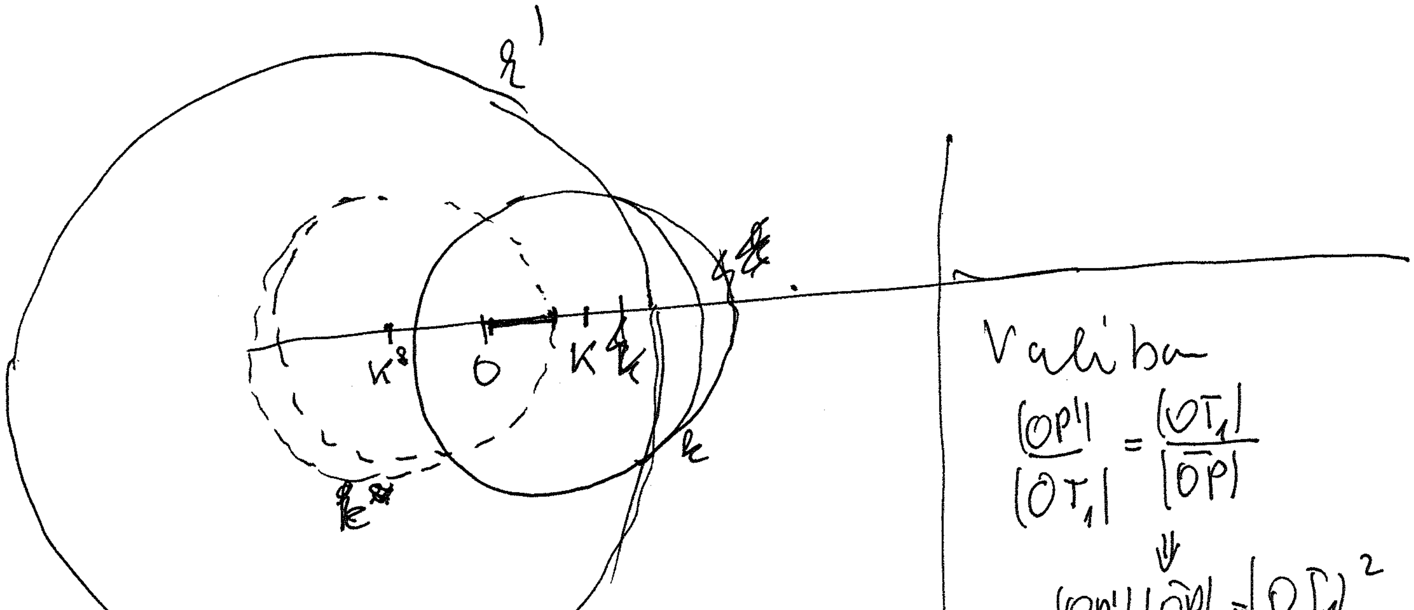


$OP \cdot OQ = -c^2$, ahol $c \neq 0$ konstans

$OP \cdot OP' = r^2 \Rightarrow$

$\boxed{OP' = \left(-\frac{r^2}{c^2}\right) OQ}$. Ha a középpontot

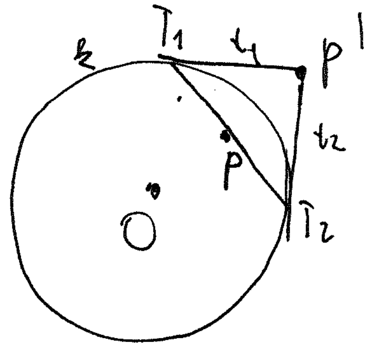
Az inverzió részleges $OQ \mapsto -OQ$
leképezés az O-ra vonatkozó tükrözés így
$\forall$ P-re $OP' = \frac{r^2}{c^2}(-OQ)$ összefüggés alapján)
a P' pont a Q pont tükrözése majd a $\frac{r^2}{c^2}$
nyújtás alkalmazásával adódik. A tükrözés
egy pontra egybevágóság így a 'k'-kört vele
egybevágó körbe viszi, így az említett leképezés
a 'k'-kört ~~pontosan~~ körbe viszi.
Ha a tükörkép k^* a kép k', akkor +1
az alábbi ábra mutatja a k kör képét



Valóban
$$\frac{|OP'|}{|OT_1|} = \frac{|OT_1|}{|OP|}$$
$$\Downarrow$$
$$|OP'|\,|OP| = |OT_1|^2$$

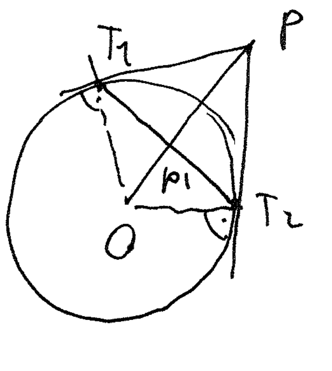
41)

a)



$P \in k$

b)



$P \notin k$

42) Milyen értékeket veheti fel {A, B, C, D} valamilyen sorrendjei a kettősviszony, ha $(ABCD)=\alpha$?

A 4 elem permutációit 3 involúció generálja

a) első 2 elem csere
b) második 2 elem csere
c) harmadik ~~2 elem csere~~ és negyedik elem cseréje

a) és c) esetén az érték a reciprokára vált

így $(ABCD)=\alpha$ esetén $(BACD)=(ABDC)=\frac{1}{\alpha}$

A második b) lépés hatása

$$(ACBD)=\frac{AB}{BC}:\frac{AD}{DC}=\frac{AB\cdot DC}{BC\cdot AD}=\frac{(AC+CB)(-BD+BC)}{BC\cdot AD}=$$

$$=-\alpha+\frac{+BD+CB+AC}{AD}=-\alpha+\frac{+AD}{AD}=-\alpha+1.$$

Akkor, hogy az összes lehetőséget megkapjuk felírjuk, vegyük még észre, hogy az első-a harmadikkal a másodikat a negyedikkel cserélve az érték nem változik

$$(ABCD)=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{CA}{AB}:\frac{CB}{BD}=(CD\,AB) \text{ ezért}$$

$\alpha=(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=(DCBA)=\alpha$

$(BACD)=(ABDC)=(CDBA)=(DCAB)=\frac{1}{\alpha}$

$(ACBD)=(BDAC)=(CADB)=(DBCA)=-\alpha+1$ ← (első után és b)-után)

$(CABD)=(DBAC)=(ACDB)=(BDCA)=\frac{1}{-\alpha+1}$ ← (3.-ból a) alapján)

$(BCAD)=(CBDA)=(ADBC)=(DACB)=1-\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha-1}{\alpha}$

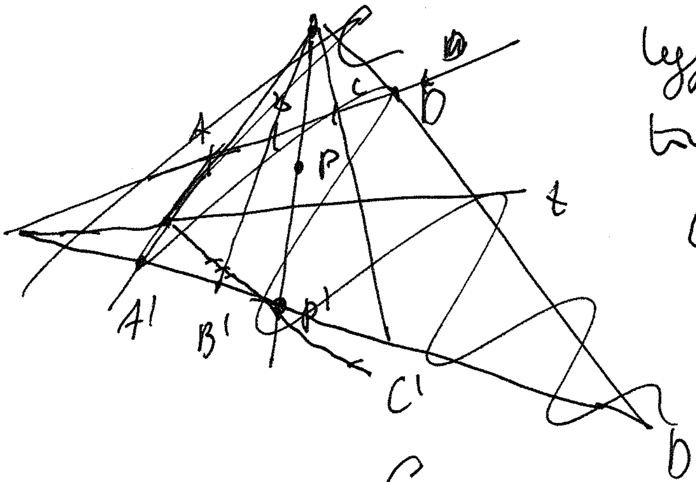
$(CBAD)=(BCDA)=(DABC)=(ADCB)=\frac{\alpha}{\alpha-1}$

Az utolsó előttiben az a) után alkalmaz b)-t, végül az utolsóban az utolsó előttire alkalmazzuk megint a)-t. Mivel a lehetséges 24 esetet mindegyikét felírtuk, a lehetséges értékek $\boxed{\left\{\alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ 1-\alpha,\ \frac{1}{1-\alpha},\ \frac{\alpha-1}{\alpha},\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\right\}}$.

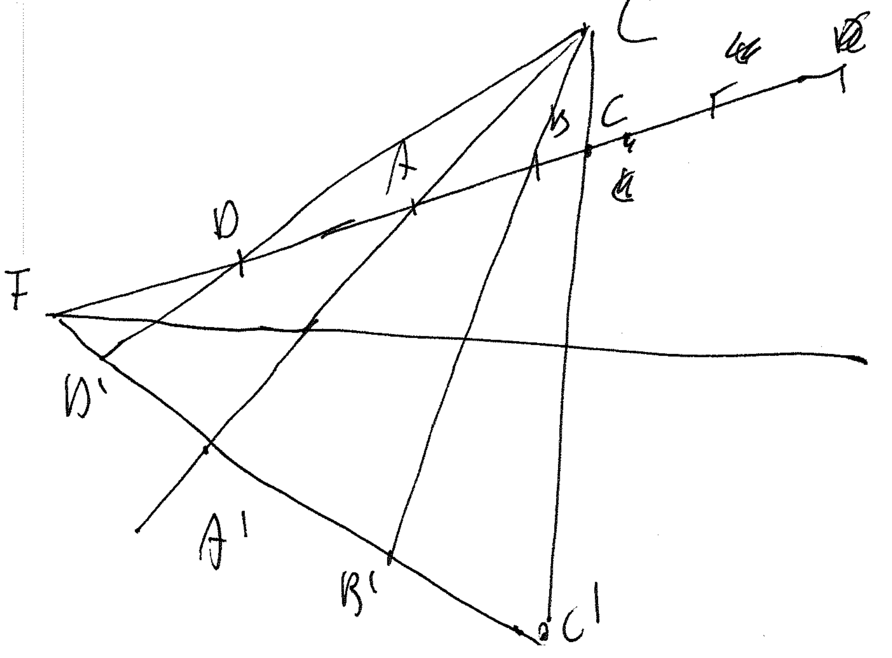
43) Igazoljuk, hogy ~~A~~ C-a kollineáris kettősviszonytartó leképezés.

a) A centrum nem illeszkedik a tengelyre

i) $\{A,B,C,D\}$ egyenese nem megy át a centrumon.



Legyen A, A' összetartozó pontpár ($A \notin t$, $A \neq A'$) $\mathcal{C}$ a centrum t a tengely. Ekkor $\mathcal{C}$-ből $\{A,B,C,D\}$ a képeire vetíthető $\Rightarrow$ Pappus-Steiner tétel miatt igaz az állítás

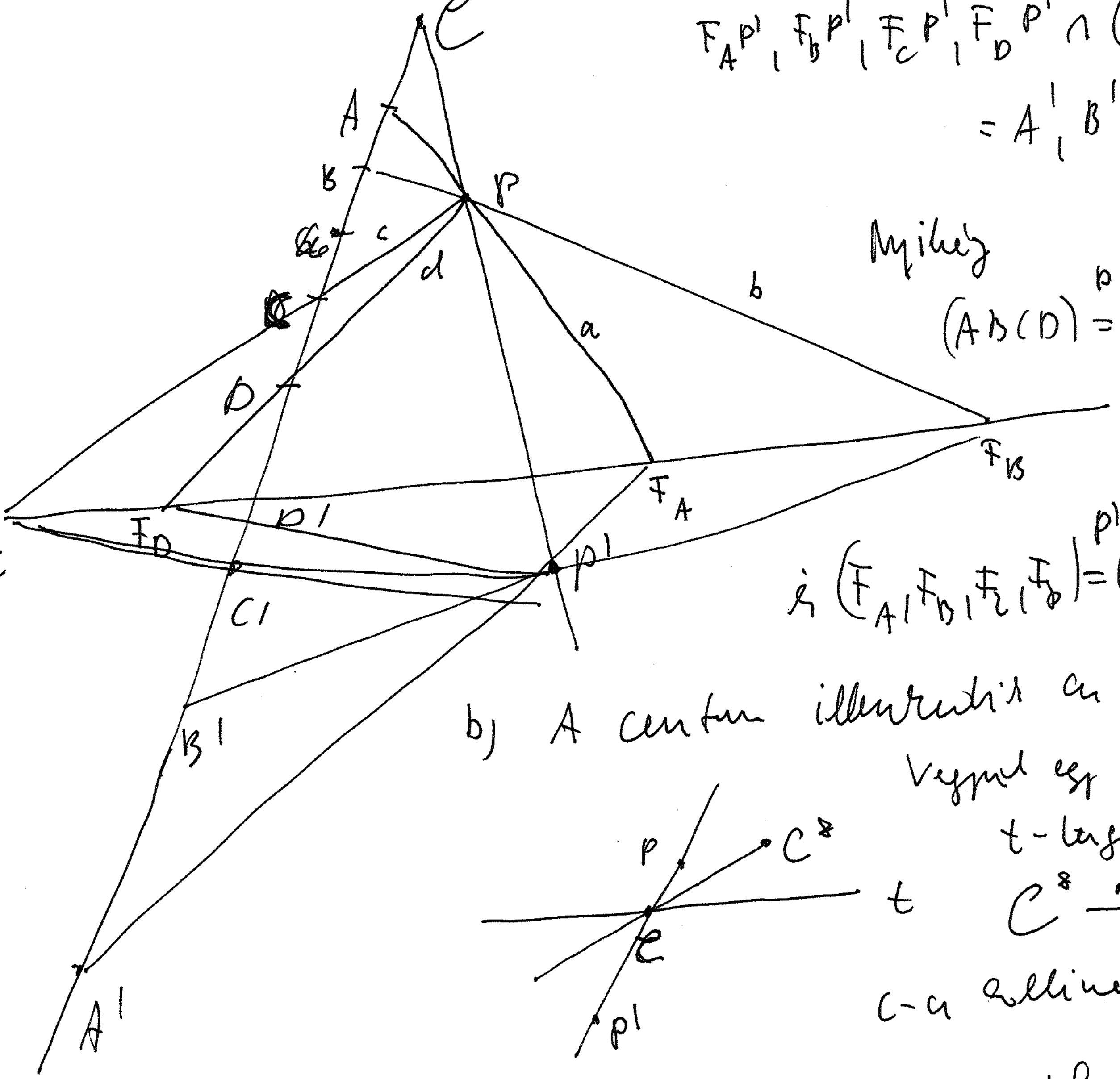


ii) {A, B, C, D} egyenes átmegy a centrumon.

Legyen P egy (AB) egyenestől különböző pont, P' a képe

$PA, PB, PC, PD \cap t = F_A, F_B, F_C, F_D$

$F_AP', F_BP', F_CP', F_DP' \cap (AB) =$
$= A', B', C', D'$



Nyilván $(ABCD) \overset{P}{=} (F_A F_B F_C F_D)$

és $(F_A F_B F_C F_D) \overset{P'}{=} (A'B'C'D')$

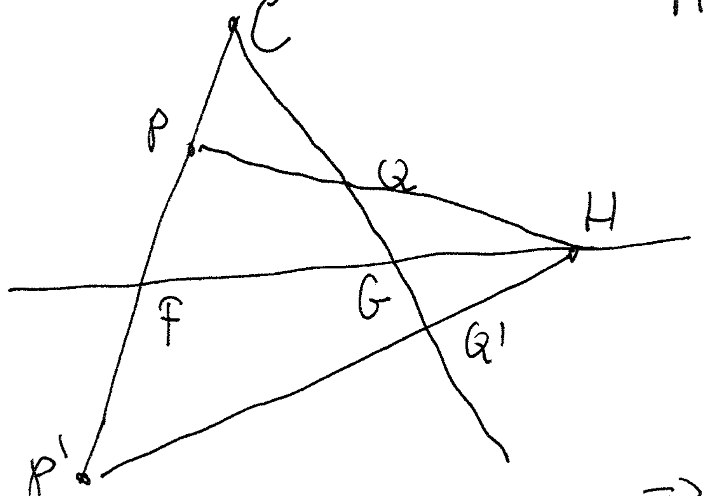
b) A centrum illeszkedik az egyenesre.

Vegyünk egy tetszőleges t-tengelyű $C^* \notin t$ c-a kollineációt.

Az első kollineáció legyen φ_C a második φ_{C^*}.

A $\varphi_{C^*} \circ \varphi_C$ egy olyan c-a kollineáció, melynek tengelye t és centruma C^{**} a (CC^*) egyenes egy C-től különböző pontja, így $\varphi_{C^{**}} = \varphi_{C^*} \circ \varphi_C$ őrzi a kettősviszonyt a) szerint $\Rightarrow$ $\varphi_C = \varphi_{C^*}^{-1} \circ \varphi_{C^{**}}$ szintén őrzi a kettősviszonyt, mert $\varphi_{C^*}^{-1}$ is őrzi.

44) Ha egy homológia centruma C tengelye t és a (PP') egyenes metszete t-vel F, akkor az $(CFPP')$ kettősviszony független P-től



Bo: legyen Q tetszőleges másik pont

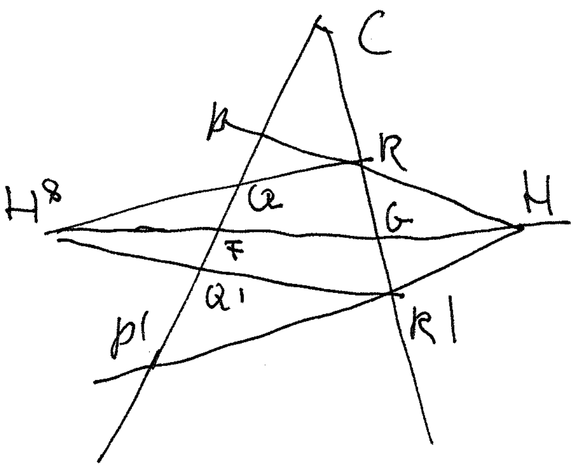
$(CQ) \cap t = G$

Q képe Q'. Ekkor

$PQ \cap P'Q' = H \in t$

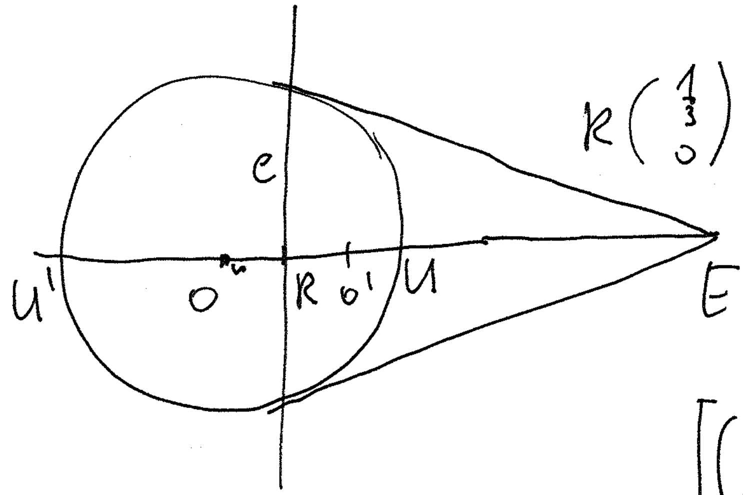
$\Rightarrow (CFPP') = (CGQQ')$.

Ha Q a (CP) egyenes pontja, vegyünk egy R-t, s ezt. t-n kívül ezzel: $(CFPP') \overset{H}{=} (CGRR') \overset{H^*}{=} (CF, QQ')$



Def: A $(CFPP')$ kettősviszony a C-n átmenő homológia karakterisztikus kettősviszonya

45) Számoljuk ki az origó $O\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ középpontú pont középpontú az $R=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\\1\end{pmatrix}$ ponton átmenő x-tengelyű merőleges egyenesvonalú reprezentációs egyenesét



$(U U' E R) = -1$

$E = \alpha\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \alpha u' + \beta u$

$\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\\1\end{pmatrix}\right] = r = \gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \gamma u' + \delta u$

$\frac{1}{3} = -\gamma + \delta$

$1 = \gamma + \delta$ $\Rightarrow$ $\boxed{\delta = \frac{2}{3} \quad \gamma = \frac{1}{3}}$

$\frac{\delta}{\gamma} = 2 \Leftarrow$

$-1 = (U'U\,ER) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{2\alpha}$

$\beta = -2\alpha \qquad \alpha + \beta = 1 \qquad \alpha = 1 + 2\alpha \qquad \boxed{\alpha = -1}$

$\boxed{\beta = 2}$

$E = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\right]$. O, O'-re ~~$-1 = O$~~ is igaz (koordinátás kettősviszony)

$-1 = (O'O\,ER)$ így ha O' távolsága O-tól x

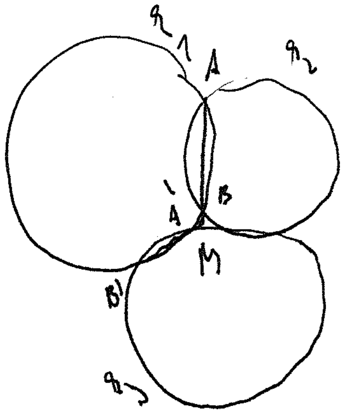
$-1 = \frac{3-x}{-3} : \frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{1-\frac{1}{3}x}{-3x+1} \iff 3x - 1 = 1 - \frac{1}{3}x \iff$

$\frac{10}{3}x = 2 \qquad x = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad O' = \left[\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\0\\1\end{pmatrix}\right]$

46) Igazoljuk, hogy 3 páronként metsző kör páronkénti közös metszői egy ponton mennek át

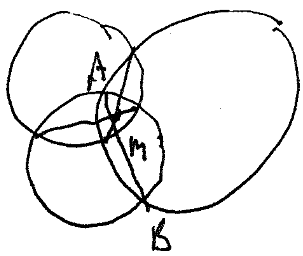
47) Szerkesszünk 3 adott körre egyszerre merőleges kört.

46) Legyen két metsző kör hatványpontja M, azaz $M = AB \cap A'B'$ ahol $\{A, B\} = k_1 \cap k_2$ $\{A', B'\} = k_1 \cap k_3$



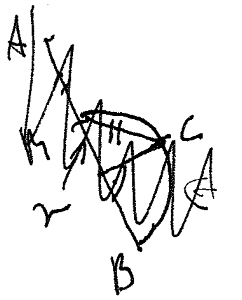
, ekkor $MA \cdot MB = MA' \cdot MB'$ azaz M hatványa k_2-re és k_3-ra megegyezik. Így M a k_2, k_3 körök hatványvonalán is rajta van $\Rightarrow M \in (A''B'')$, ahol $\{A'', B''\} = k_2 \cap k_3$.

47) A kör hatványpontja a 3 kör páronkénti hatványvonalainak közös metszéspontja M. A sugara a köröket kívülről érintő kör sugara, ha M a körökön kívül van (mint az ábrán)

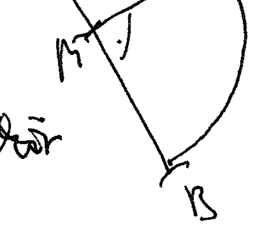


$|MA||MB| = r^2$ összefüggés alapján

Thalesz tétel és a befogó tétel segítségével az r az alábbi módon szerkeszthető:



félkör



48) Mikor ad centrális-axiális kollineációt az Cayley-Klein modell O középpontja körüli α-szögű forgatás?

49) Mi az analitikus leírása a C-K modellben a $K\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ pont körüli $\frac{\pi}{2}$ hiperbolikus szögű elforgatásnak?

50) A C-K modell $I=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$ ∞ távoli pontja által meghatározott párhuzamos áthelyezés az $P\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ ∞-távoli pontot a $P=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ ∞ távoli pontba viszi. Hová viszi a leképezés a $P=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ pontot?

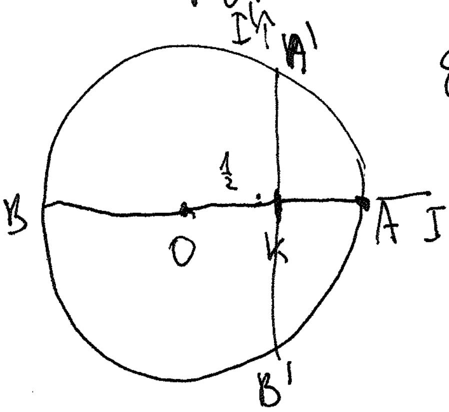
51) A C-K modellgömb α-síkját a $x+y+z=1$ sík metszi ki, a β síkot a $z=-\frac{1}{2}$. Mi a kölcsönös helyzete a két síknak? Ha van távolságuk, számoljuk ki!

52) Legyen k egy kör, ~~P~~ K egy belső pontja, ~~tekintsük~~ és tekintsük ~~azt~~ azt a kollineációt, melynek centruma K, ~~tengelye a ∞ távoli egyenes és egy P ideális pontot, a $\overrightarrow{PK}$ félegyenes k-val vett második metszéspontjába viszi.~~ és a k-t K-n keresztülhaladó valamely 2 húr (A:B, B:A) k-n levő A, B, C, D végpontjait egymásba viszi. Igazoljuk, hogy a kollineáció a k-t saját magába viszi. Határozzuk meg a kollineáció tengelyét.

~~53) Szerkesszünk adott körbe olyan Δ-t, melynek oldalai 3 adott a kör belsejében levő ponton haladnak át~~

48) A feladat nem félreérthető, mert a modell középpontjában az Euklideszi és hiperbolikus szögmérés u.az. Az Euklideszi síkon az elforgatásnak mint a forgáscentrumtól különböző fixpontja semmilyen α-ú szög esetén. De a c.a kollineáció fogalma a projektív síkkal bővített Euklideszi síkra értelmezett, ezért a ∞ távoli pontokon vett lehetőséget is figyelembe kell venni. Mivel az Euklideszi egyenesnek egy ∞ távoli pontja van, ezért a ∞ távoli egyenes egyetlen esetben lehet pontonként fix, ha a forgatás szöge π, azaz a leképezés az ~~pon~~ O pontra tükrözés. Ekkor O centrum és a ∞-távoli egyenes a tengely.

49)



Ez egy egybevágósága a hiperbolikus síknak, mert c-a kollineációval származtatott előáll, így egy olyan kollineációval van mi, mely a kört magára képezi, A-t A'-be B-t B'-be A'-t B-be B'-t A-ba képezi, a K-t fixen hagyja. A kollineáció analitikus alakja homogén koordinátákban egy 3x3-as mátrixszal reprezentált

$$\varrho\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

~~Az (AK) egyenes $I=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ pontját a $I'=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ pontba viszi, ezért~~

~~$\varrho a_{11}=0$ $\varrho a_{21}=1$ $\varrho a_{31}=0$ $\varrho\neq 0$ miatt $a_{11}=a_{31}=0$~~

~~$a_{21}=\frac{1}{\varrho}$~~

S-t vélaunr 1-nek

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (k fixpont)

(i) $\frac{1}{2}a_{11} + a_{13} = \frac{1}{2}\lambda_1$

(ii) $\frac{1}{2}a_{21} + a_{23} = 0 \Rightarrow a_{21} = -2a_{23}$

(iii) $\frac{1}{2}a_{31} + a_{33} = \lambda_1$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} a_{11} + a_{13} = \frac{1}{2}\lambda_2 & (i)' \\ a_{21} + a_{23} = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 & (ii)' \\ a_{31} + a_{33} = \lambda_2 & (iii)' \end{array}$$

(i) és (i)'

$\frac{1}{2}a_{11} = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$ $\boxed{a_{11} = (\lambda_2 - \lambda_1)}$ $\boxed{a_{13} = \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2}}$

$\boxed{a_{21} = \sqrt{3}\lambda_2}$ $\boxed{a_{23} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2}$

$\boxed{a_{31} = 2(\lambda_2 - \lambda_1)}$ $\boxed{a_{33} = 2\lambda_1 - \lambda_2}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & a_{12} & \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2} \\ \sqrt{3}\lambda_2 & a_{22} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 \\ 2(\lambda_2 - \lambda_1) & a_{32} & 2\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}a_{12} + \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2} = -\lambda_3$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 + a_{22}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 = \lambda_3 \cdot 0 = 0$

$\Downarrow$

$\boxed{a_{22} = 0}$

$\lambda_1 + \sqrt{3}a_{12} = -2\lambda_3 \Rightarrow a_{12} = \frac{-2\lambda_3 - \lambda_1}{\sqrt{3}}$

$\lambda_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_{32} = \lambda_3$ $\quad a_{32} = \frac{2(\lambda_3 - \lambda_1)}{\sqrt{3}}$ $\Leftarrow (\lambda_2 - \lambda_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}a_{32} + 2\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_3$

Végül $B \longmapsto B'$-be

$$\begin{pmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & \frac{-2\lambda_3-\lambda_1}{\sqrt3} & \lambda_1-\frac{\lambda_2}{2} \\ \sqrt3\lambda_2 & 0 & -\frac{\sqrt3}{2}\lambda_2 \\ 2(\lambda_2-\lambda_1) & \frac{2(\lambda_3-\lambda_1)}{\sqrt3} & 2\lambda_1-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda_4\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac{\sqrt3}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1-\lambda_2+\lambda_1-\frac{\lambda_2}{2} = \lambda_4\cdot\frac12 \qquad 2\lambda_1-\frac32\lambda_2=\frac12\lambda_4$$

$$-\sqrt3\lambda_2+\frac{\sqrt3}{2}\lambda_2 = -\frac{\sqrt3}{2}\lambda_4 \qquad \Rightarrow \boxed{\lambda_2=\lambda_4} \qquad \Rightarrow$$

$$2\lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_1-\lambda_2=\lambda_4 \qquad 4\lambda_1-3\lambda_2=\lambda_4$$

$$\boxed{\lambda_1} = \lambda_4+3\lambda_2 = \boxed{4\lambda_4}$$

így a mátrix, amivel $b' \mapsto A$

$$\begin{pmatrix} -3\lambda_4 & \frac{-2\lambda_3-4\lambda_4}{\sqrt3} & \frac72\lambda_4 \\ \sqrt3\lambda_4 & 0 & -\frac{\sqrt3}{2}\lambda_4 \\ -3\lambda_4 & \frac{2\lambda_3-8\lambda_4}{\sqrt3} & 7\lambda_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac{\sqrt3}{2}\\1\end{pmatrix} = \lambda_5\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$ alapján

Végül
$$-\frac32\lambda_4+\frac{\sqrt3}{2}\left(\frac{2\lambda_3+4\lambda_4}{\sqrt3}\right)+\frac72\lambda_4=\lambda_5$$

$$\frac{\sqrt3}{2}\lambda_4-\frac{\sqrt3}{2}\lambda_4=0$$ ~~alapján λ_4~~

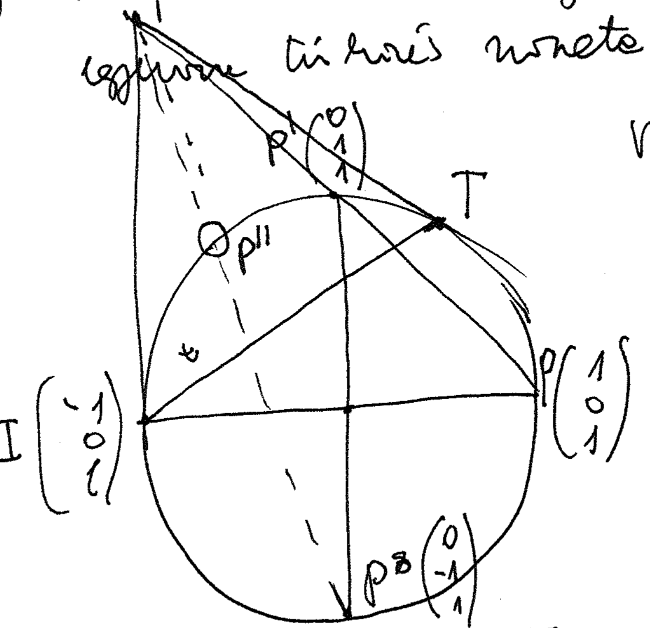
$$-\frac32\lambda_4-\frac{\sqrt3}{2}\left(\frac{2\lambda_3-8\lambda_4}{\sqrt3}\right)+7\lambda_4=\lambda_5$$ egyenletrendszerből

$$\left.\begin{aligned} 4\lambda_4+\lambda_3&=\lambda_5\\ 8\lambda_4-\lambda_3&=\lambda_5\end{aligned}\right\} \Rightarrow 4\lambda_4=2\lambda_3 \qquad \boxed{\lambda_3=2\lambda_4}$$

A mátrix
$$\begin{pmatrix} -3\lambda_4 & \frac{-8}{\sqrt3}\lambda_4 & \frac72\lambda_4 \\ \sqrt3\lambda_4 & 0 & -\frac{\sqrt3}{2}\lambda_4 \\ -3\lambda_4 & -\frac{4}{\sqrt3}\lambda_4 & 7\lambda_4 \end{pmatrix}$$
, ahol v. megint λ_4-t 1-nek választhatjuk pld. $\lambda_4=1$-el $\lambda_2=1$ $\lambda_3=2$ $\lambda_1=4$ $\lambda_5=6$

a mátrix ~~pro~~ viszont pedig az $\begin{pmatrix}-3 & -\frac{8}{\sqrt3} & \frac72\\ \sqrt3 & 0 & -\frac{\sqrt3}{2}\\ -3 & -\frac{4}{\sqrt3} & 7\end{pmatrix}$-el egyenértékű lesz.

50) A párhuzamos áthelyezés 2 párhuzamos egyenesre tükrözés szorzata. Az egyik egyenesnek válasszuk az IP-egyenest.



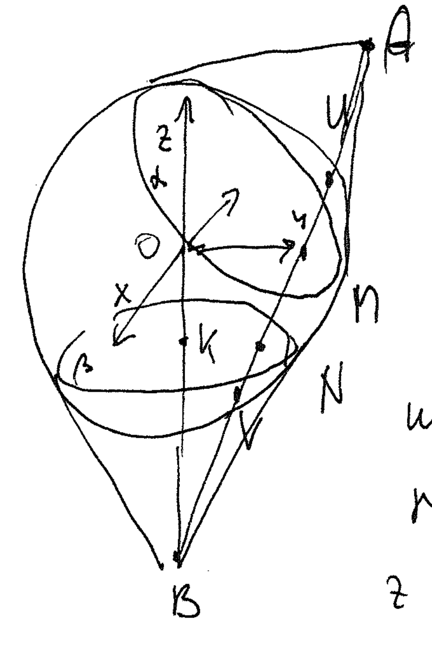
A másik egyenes a C-K modellben átmegy az I ponton. A P pontnak erre vonatkozó tükörképe P' kell legyen, mert az első tükrözésnél P a tengely pontja. A tükrözés egy olyan C-a kollineáció, mely centruma a (PP') egyenesen van és valamely I-n áthaladó húr ~~polárisa~~ pólusa is egyben. Tehát az I-beli érintő és a (PP') egyenes metszéspontja (legyen C). A kollineáció tengelye a C-ből húzott másik érintő T talppontját köti össze I-vel. Az első tükrözés az (IP) egyenesre vonatkozó Euklideszi tükrözés, azaz a $P'\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$-t a $P^*\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ pontba viszi. Ennek képét kell a második tükrözésnél megkeresni. Mivel P^* ezen tükrözésnél kapott P'' képe az $(\overset{\frown}{IP'T})$ körívnek és a (CP^*) egyenesnek is pontja, ezért nem más mint azok metszéspontja. (Ez már megoldja a feladatot, de koordinátákkal is kiszámolhatjuk...) $C=\left[\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right]$; (CP^*) egyenes koordinátái $(3,1,1)$ így a pontjaira $3x+y+z=0$ teljesül inhomogén egyenlete $3x' + y' + 1 = 0$, ahol $x' = \frac{x}{z}$ $y' = \frac{y}{z}$

Beírva a kör egyenletébe az $y' = -1 - 3x'$ -t.

$(x')^2 + (-1-3x')^2 = 1$ $\quad 10x'^2 + 6x' + \cancel{1} = \cancel{1}$ $\quad 2x'(5x'+3) = 0$

$x'_1 = 0$ ✓ $\quad x'_2 = -\frac{3}{5}$ $\quad y' = -1 + \frac{9}{5} = \frac{4}{5}$ $\quad \Rightarrow \boxed{P'' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}}$

51) A két sík metszésvonalát $\left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ z=-\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer ~~felel meg~~ írja le, ahonnan az egyenes pontjaira $x+y=\frac{3}{2}$ áll fenn. Az $x^2+y^2+z^2 = x^2+\left(\frac{3}{2}-x\right)^2+\frac{1}{4} = 2x^2-3x+\frac{10}{4} =$ $= 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - 2\cdot\frac{9}{16}+\frac{10}{4} = 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{11}{8} > 1$ egyenlőtlenség miatt a metszésvonal elkerüli az egységgömböt, azaz a síkok ultraparalelek.



Az $x+y+z=1$ sík pontjai az $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ gömbi pontok, ezekben az érintősíkok az $x=1$, $y=1$, $z=1$ sík, ezek mindegyike tartalmazza az A pontot, így $A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Az z tengely tartalmazza a B pontot és teljesül a $OK\cdot OB=1$ egyenlőség a β sík z-tengelyen levő K pontjával, ez a $K=\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ pont. $\Rightarrow B=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$. Az AB egyenes $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ pontjaira $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ egyenlet áll fenn, így $N = AB \cap \beta$ alapján $-\frac{1}{2} = -2 + t_N\cdot 3 \Rightarrow \boxed{t_N = \frac{1}{2}}$

$M = AB \cap \alpha$

parametricky $N=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. A $\begin{pmatrix}t\\ t\\ 3t-2\end{pmatrix}$ $\in x+y+z=1$

vložíme $2t_M+3t_M-2=1 \Rightarrow t_M=\frac{3}{5} \Rightarrow M=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5}\\ -\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

$U,V = AB \cap$ Gou

$1=2t^2+(3t-2)^2 = 11t^2-12t+4$

$0=11t^2-12t+3 \qquad t_{U,V}=\frac{12\pm\sqrt{12\cdot 12-11\cdot 12}}{22}=\frac{6\pm\sqrt{3}}{11}$

$$U=\begin{pmatrix}\frac{6+\sqrt3}{11}\\ \frac{6+\sqrt3}{11}\\ \frac{18+3\sqrt3}{11}-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6+\sqrt3}{11}\\ \frac{6+\sqrt3}{11}\\ \frac{-4+3\sqrt3}{11}\end{pmatrix} \qquad V=\begin{pmatrix}\frac{6-\sqrt3}{11}\\ \frac{6-\sqrt3}{11}\\ \frac{-4-3\sqrt3}{11}\end{pmatrix} \qquad t_U=\frac{6+\sqrt3}{11} \quad t_V=\frac{6-\sqrt3}{11}$$

$$\mathfrak{z}(MN)=\frac{1}{2}\ln(MNVU)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{MV}{VN}:\frac{MU}{UN}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t_M-t_V}{t_V-t_N}:\frac{t_M-t_U}{t_U-t_N}\right)=$$

$MV=t_M\cdot|AB|-t_V\cdot|AB| = (t_M-t_V)|AB|$

$VN=t_V|AB|-t_N|AB| = (t_V-t_N)|AB|$

$MU=(t_M-t_U)|AB|$; $UN=(t_U-t_N)|AB|$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{3}{5}+\frac{6-\sqrt3}{11}}{\frac{6-\sqrt3}{11}-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3}{5}-\frac{6+\sqrt3}{11}}{\frac{6+\sqrt3}{11}-\frac{1}{2}}\right)=\boxed{\frac{1}{2}\ln(7+6\sqrt3)}$$

$$\frac{\frac{33+30-5\sqrt3}{\cancel{55}}}{\frac{12-2\sqrt3-11}{\cancel{22}}}:\frac{\frac{33-30-5\sqrt3}{\cancel{55}}}{\frac{12+2\sqrt3-11}{\cancel{22}}}=\frac{63-5\sqrt3}{1-2\sqrt3}:\frac{3-5\sqrt3}{1+2\sqrt3}=$$

$$=\frac{63-5\sqrt3+126\sqrt3-10\cdot 3}{3-5\sqrt3-6\sqrt3+10\cdot 3}=\frac{33+121\sqrt3}{33-11\sqrt3}=\frac{3+11\sqrt3}{3-\sqrt3}=\frac{9+33\sqrt3+3\sqrt3+33}{6}=$$

$$=\frac{42+36\sqrt3}{6}=7+6\sqrt3$$

paraméterrel $N=\begin{pmatrix}\frac12\\ \frac12\\ -\frac12\end{pmatrix}$. 4 $A\begin{pmatrix}t\\ t\\ 3t-2\end{pmatrix} \in x+y+z=1$

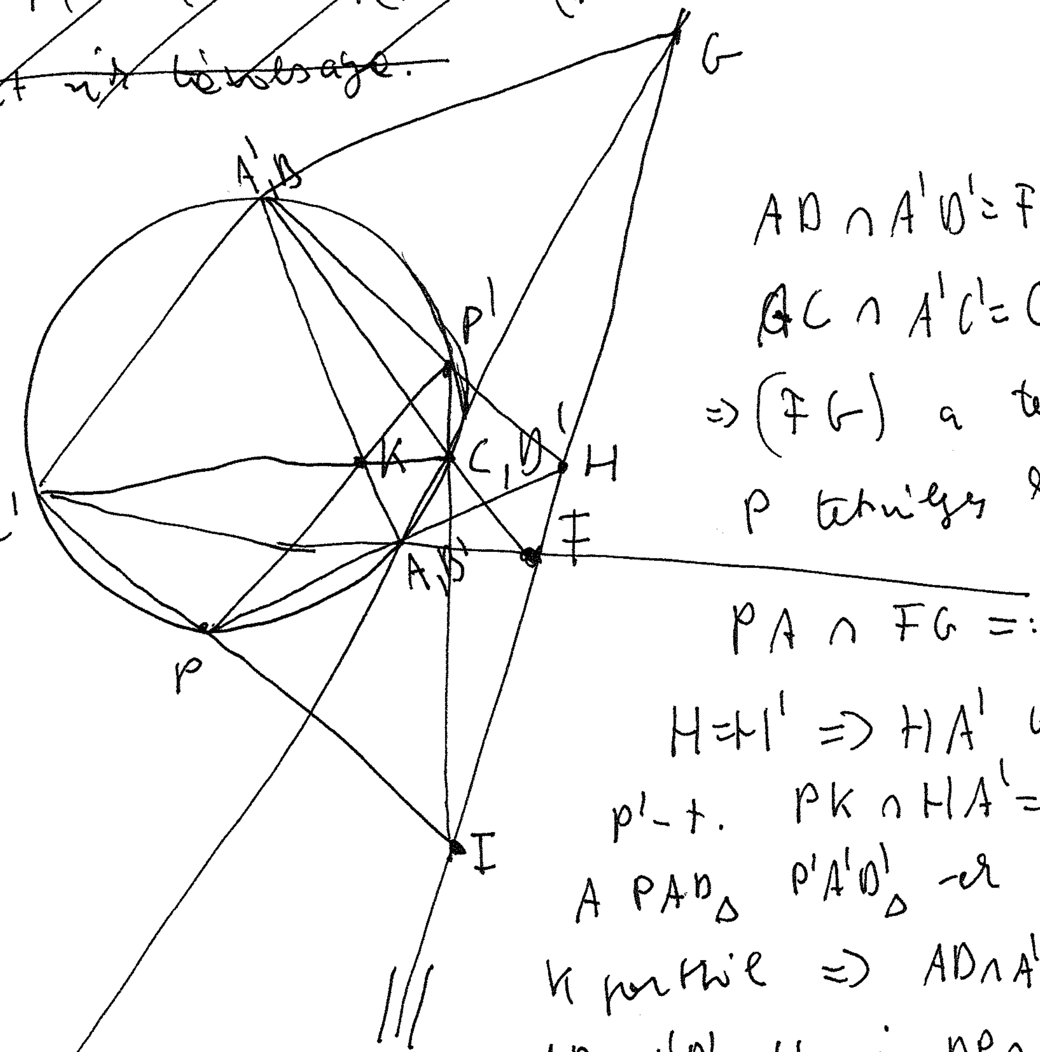
relációból $2t_M+3t_M-2=1$ alapján $5t_M=3$ $\boxed{t_M=\frac35}$

így az $M=\begin{pmatrix}\frac35\\ \frac35\\ \frac15\end{pmatrix}$ pont a keresett metszéspont.

$\cancel{\delta(d_1, B) = |MN| = \sqrt{\left(\frac35-\frac12\right)^2+\left(\frac1{10}\right)^2+\left(\frac12+\frac15\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{100}+\frac{49}{100}} = \sqrt{\frac{51}{100}}}$

~~a két sík távolsága.~~

52)



$AD \cap A'D' = F$ fixpont

$AC \cap A'C' = G$ fixpont

$\Rightarrow (FG)$ a tengely

P tetszőleges köri pont

$PA \cap FG =: H$

$H = H' \Rightarrow HA'$ tartalmazza P'-t. $PK \cap HA' = P'$.

A $PAD_\triangle$ $P'A'D'_\triangle$-ek perspektívek K pontból $\Rightarrow$ $AD \cap A'D' = F$

$AP \cap A'P' = H$ és $DP \cap D'P' = I$

pontok is kollineárisak a Desargues tétel miatt. Így a $(PACP'A'C')$ hatszög szemközti oldalegyenesei metszéspontja $PA \cap P'A' = H$ $AC \cap A'C' = G$ és $\underset{D'P'}{CP'} \cap \underset{DP}{C'P} = I$

kollineárisak a Pascal–Brianchon tétel megfordítása miatt a fenti pontok 1 kúpszeletre illeszkednek, 5 belőlük a körön van $\Rightarrow$ 6. is.

53) A $z \geq 0$ pontok legyenek egy féltér modell pontjai. Legyen 'a' egyenes a z-tengely, a 'b' egyenes ∞ távoli pontjai, pedig $B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$. Határozzuk meg a normáltranszverzálisát, az 'a', 'b' kitérő hiperbolikus egyeneseknek.

54) Igazoljuk, hogy az illeszkedési síkon a e centrummal, t tengellyel egy $\{P, P'\}$ pontpárral (melyre $\{P, P', e\}$ kollineáris) megadott kollineáció, akkor és csak akkor jól definiált, ha a síkon teljesül a Desargues tétel.

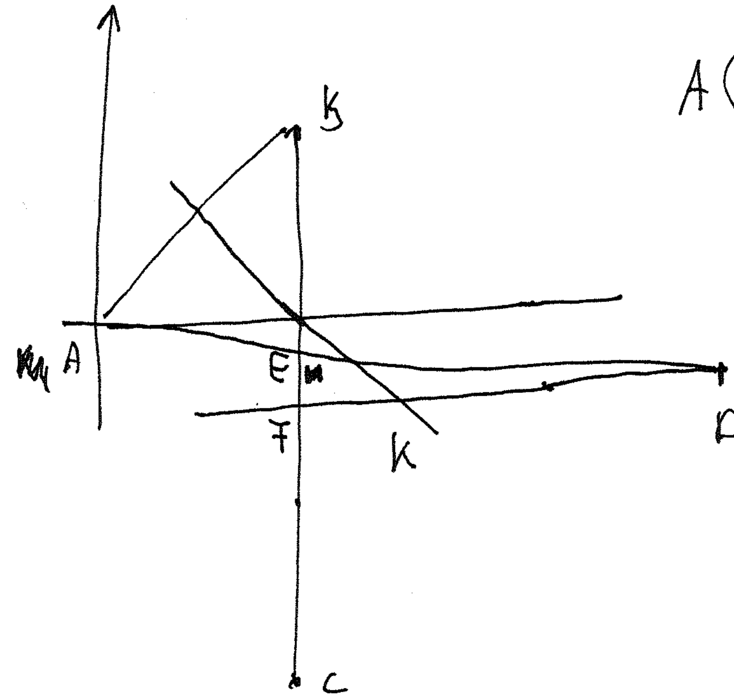
55) Számoljuk ki az alábbi koordinátákkal adott

a) $\left\{\underset{A}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}, \underset{B}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}, \underset{C}{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}}\right\}$, $\left\{\underset{A'}{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}, \underset{B'}{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}}, \underset{C'}{\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}}\right\}$ kollineáris ponthármasokhoz tartozó Pascal-egyenest

b) $\left\{\underset{A}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}, \underset{B}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}, \underset{C}{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}}\right\}\left\{\underset{A'}{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}, \underset{B'}{\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}}, \underset{C'}{\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}}\right\}$ háromszögek perspektivitási centrumát és tengelyét

c) $\underset{A}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}, \underset{B}{\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\\1\end{bmatrix}}, \underset{C}{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}}, \underset{D}{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}}, \underset{E}{\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}}, \underset{F}{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\y\\1\end{bmatrix}}$ körbe írt pont hatos Pascal-egyenesét, ha $y<0$. Mi a Brianchon-pontja annak a érintő hatszögnek, mely éppen a fenti pontokban érinti az egységkört?

53)



$$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\quad C\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}\quad K\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$r=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{10}{4}}$$

$$D=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{5}{2}}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$$

$AE = t\cdot AD$ A a origó $\quad \begin{pmatrix}1\\x\\0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{5}{2}}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} \quad t=\dfrac{1}{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{5}{2}}}$

$x=-\dfrac{1}{3+\sqrt{10}} \quad E=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{3+\sqrt{10}}\\0\end{pmatrix} \quad M=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{3+\sqrt{10}}\\m_3\end{pmatrix}$ $M \in$ a BC

átmérőjű BC fölé rajzolt körre. $\cancel{1+\left(-\frac{1}{3+\sqrt{10}}\right)^2+m}$

$$\frac{9}{4}=|BF|^2=|MF|^2=\left(-\frac{1}{3+\sqrt{10}}+\frac{1}{2}\right)^2+m_3^2$$

$$m_3^2=2+\frac{1}{3+\sqrt{10}}-\left(\frac{1}{3+\sqrt{10}}\right)^2=2+\frac{2+\sqrt{10}}{(3+\sqrt{10})^2}=2+\cancel{\frac{2+\sqrt{10}}{13+6\sqrt{10}}}=$$

$$=\frac{26+12\sqrt{10}+2+\sqrt{10}}{(3+\sqrt{10})^2}=\frac{28+13\sqrt{10}}{(3+\sqrt{10})^2} \qquad \cancel{\boxed{m_3=\frac{\sqrt{28+13\sqrt{10}}}{3+\sqrt{10}}}}$$

$$\cancel{r^2=|AM|^2=1+\frac{1}{(3+\sqrt{10})^2}+\frac{28+13\sqrt{10}}{(3+\sqrt{10})^2}=1+\frac{29+14\sqrt{10}}{(3+\sqrt{10})^2}=\frac{42+17\sqrt{10}}{(3+\sqrt{10})^2}}$$

$$\cancel{|AM|=\frac{\sqrt{42+17\sqrt{10}}}{3+\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{N=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{\sqrt{42+17\sqrt{10}}}{3+\sqrt{10}}\end{pmatrix}}}$$

$$M=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3+\sqrt{10}}\\\sqrt{2+\frac{1}{3+\sqrt{10}}-\left(\frac{1}{3+\sqrt{10}}\right)^2}\end{pmatrix}$$

$$r^2 = |AM|^2 = 1 + \left(\frac{1}{3+\sqrt{10}}\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{3+\sqrt{10}} - \left(\frac{1}{3+\sqrt{10}}\right)^2\right) =$$

$$= 3 + \frac{1}{3+\sqrt{10}} = \frac{10+3\sqrt{10}}{3+\sqrt{10}} = \frac{(10+3\sqrt{10})(\sqrt{10}-3)}{1} =$$

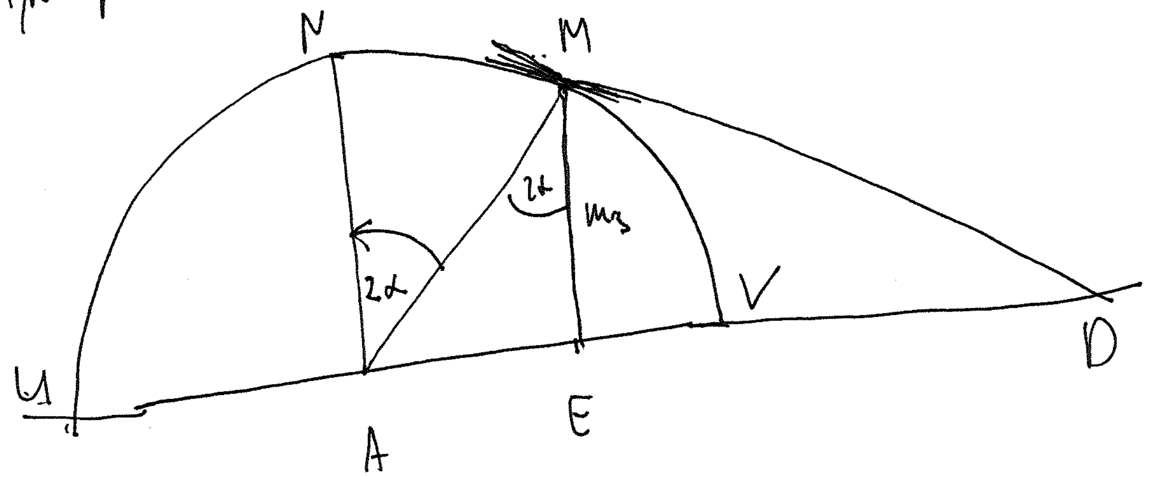
$$= 10\sqrt{10} + 3\cdot 10 - 3\cdot 10 - 9\sqrt{10} = \sqrt{10}$$

$\boxed{r = \sqrt[4]{10}}$ $\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt[4]{10} \end{pmatrix}}$ N, M, A nem egyenesre

középpontja $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és átmegy a

a kört sugara $r = \sqrt[4]{10}$

M, N ponton..



Maga a távolság

$$s(a,b) = |\overline{MN}| = \ln(MNUV) = \ln\left(\frac{\sin\frac{MAU\sphericalangle}{2}}{\sin\frac{UAN\sphericalangle}{2}} : \frac{\sin\frac{MAV\sphericalangle}{2}}{\sin\frac{VAN\sphericalangle}{2}}\right) =$$

$MAU\sphericalangle = 2\alpha$ $\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ $= \ln\left(\frac{\sin\alpha}{-\sin\left(\frac{2\alpha+\frac{\pi}{2}}{2}\right)} : \frac{-\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-2\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}\right) =$

$$= \ln\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)} : \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\right) =$$

$= \ln\left(\frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\cos(2\alpha)}\right)$ $\cos(2\alpha) = \frac{ME}{AM} = \frac{m_3}{\sqrt{10}}$ $\cancel{\sin^2(2\alpha) = 1 - \frac{m_3^2}{10}}$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{\sqrt{10}-m_3}{2\sqrt{10}} = \frac{10-\sqrt{10}\,m_3}{20}$$

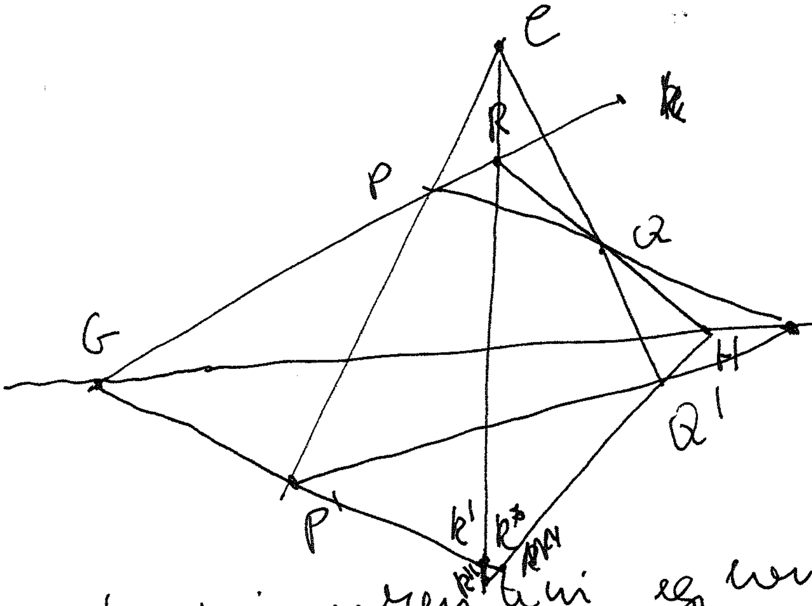
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{10-\sqrt{10}\,m_3}}{\sqrt{20}}$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{2}\sin 2t}{\cos 2t}\right) = \ln\left(\frac{\frac{\sqrt{10-\sqrt{10}\,m_3}}{\sqrt{10}}}{\frac{m_3}{\sqrt{10}}}\right) = \ln\left(\sqrt{10-\sqrt{10}\,m_3}\right) -$$

$-\ln(m_3)$, ahol $\boxed{m_3 = \sqrt{\frac{28+13\sqrt{10}}{3+\sqrt{10}}}} = \sqrt{(28+13\sqrt{10})(\sqrt{10}-3)} =$

$$= \sqrt{28\sqrt{10}+13\cdot 10-84-39\sqrt{10}} = \sqrt{46-11\sqrt{10}}\,.$$

54) Vegyük a Q pontot, mely nem illeszkedik a tengelyre és a PP' egyenesre sem. $(PQ)\cap t =: F$, (PQ) egyenes képe (FP') (F fixpont) $\Rightarrow FP' \cap CQ = Q'$.

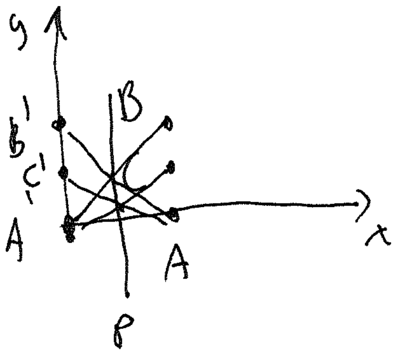


Ha a kollineáció jól definiált a $\{P,P'\}$ pontpárból és $\{Q,Q'\}$ pontpárból is meg kell kapnunk egy tetszőleges R pont R'-képét.

P-ből szerkesztve $RP\cap t = G$ és $GP'\cap CR = R'$ pont. Q-ból szerkesztve $RQ\cap t = H$ és $HQ'\cap CR = R''$. A jól Ha a Desargues-tétel igaz, akkor R' és R'' nem lehet különböző pont, mert $R'\neq R'' \Rightarrow GP'\cap HQ' = R^*$ pontokkal a $PRQ_\triangle$, $P'R^*Q'_\triangle$-ek t-re perspektívek, tehát PP', R^*R, és QQ' közös ponton mennek át (és ez a C lesz) így R^* is illeszkedik CR-re $\Leftrightarrow R', R'', R^*$ u.az a pont. Tehát, ha jól definiált a szerkesztés, akkor

~~Vegyünk~~ tetszőleges PQR háromszöget ~~a tengelyre~~ ~~vonatkozó~~ és a vele centrálisan perspektív P'Q'R' háromszöghöz a 't' tengelyt úgy kell kapni, mint a $(PR \cap P'R', PQ \cap P'Q')$ pontpárból egyenest, mint a $(PR \cap P'R', RQ \cap R'Q')$ pontpárból $\Rightarrow$ a két háromszög tengelyesen perspektív, hiszen a fenti 3 pont egy egyenesre (a kollineációs tengelyre) illeszkedik.

55) a)



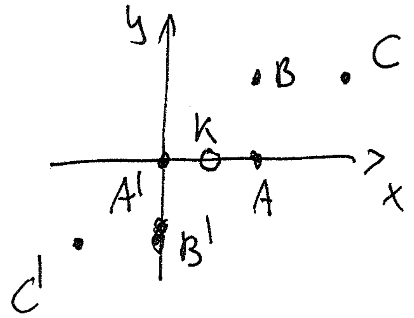
$AB' \cap BA' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$AC' \cap CA' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$

A p egyenes inhomogén egyenlete $\boxed{x = \frac{1}{2}}$

A p egyenes homogén koordinátái $(-2 \ 0 \ 1)$

b)



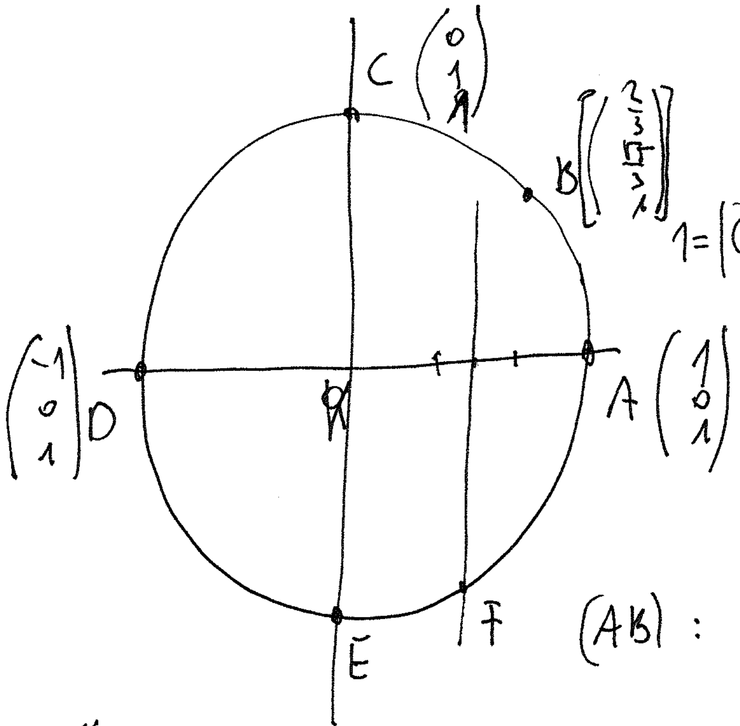
A centrum a $K = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pont

A tengely pontja $AB \cap A'B' = Y$ az y tengely ∞ távoli pontja

$BC \cap B'C' = X$ az ~~x~~ x tengely ∞ távoli pontja

$\Rightarrow$ a tengely inhomogén módon nem leírható, az ∞ távoli egyenes. A homogén koordinátái, amelyet ~~tartalmaz~~ az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pontokat $[(0, 0, 1)]$.

c)



$1 = |KF|^2 = \frac{1}{4} + y^2 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$F\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\\1\end{pmatrix}$

$(AB): \quad \frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{5}}{3}y - x = 0$

$\sqrt{5}y = x \qquad y = \frac{x}{\sqrt{5}}$

$AB = \left[\left(\overset{x:=1}{1}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -1\right)\right]$

$DE = [(1, 1, +1)]$

$AB \cap DE = \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right] \qquad \left.\begin{matrix} x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{matrix}\right\} \quad x = z$

$2x = -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)y$

$x = -\frac{5+\sqrt{5}}{10}y$

$z = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)y = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$

$AB \cap DE = \left[\begin{pmatrix}-\frac{5+\sqrt{5}}{10}\\1\\\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\end{pmatrix}\right]$

$CD = [(1, -1, +1)]$

$AF = \left[\left(1, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -1\right)\right]$

$\left[\ \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - x = 0 \qquad x = -\frac{\sqrt{3}}{2}y\ \right]$

$CD \cap AF = \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right] \qquad \begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x - \frac{2}{\sqrt{3}}y - z = 0 \end{matrix} \qquad 2x = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)y = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}y = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}y$

$x = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}y \qquad z = y - x = \left(1 - \frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)y = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}y$

$CD \cap AF = \left[\begin{pmatrix}\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\\1\\\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\end{pmatrix}\right]$

A Pascal egyenes a $(AB \cap DE, CD \cap AF)$:
$= [(p_1, p_2, p_3)]$

$$-\frac{5+\sqrt5}{10}p_1+p_2+\frac{5+3\sqrt5}{10}p_3=0$$

$$\frac{3+2\sqrt3}{6}p_1+p_2+\frac{3-2\sqrt5}{6}p_3=0$$

$$\left(\frac{3+2\sqrt3}{6}+\frac{5+\sqrt5}{10}\right)p_1+\left(\frac{3-2\sqrt5}{6}-\frac{5+3\sqrt5}{10}\right)p_3=0$$

$$\frac{15+10\sqrt3+15+3\sqrt5}{15}p_1=\frac{15+9\sqrt5-15+10\sqrt5}{15}p_3$$

$$(30+10\sqrt3+3\sqrt5)p_1=19\sqrt5\,p_3$$

$$\frac{30+10\sqrt3+3\sqrt5}{19\sqrt5}p_1=p_3$$

$$-(5+\sqrt5)p_1+10p_2+(5+3\sqrt5)\frac{30+10\sqrt3+3\sqrt5}{19\sqrt5}p_1=0$$

$$\left(-5-\sqrt5+\frac{(5\sqrt5+3)(30+10\sqrt3+3\sqrt5)}{19}\right)p_1=-10p_2$$

$$\left(-95-19\sqrt5+150\sqrt5+90+50\sqrt{15}+30\sqrt3+75+9\sqrt5\right)p_1=$$

$$=-190p_2$$

$$(70+140\sqrt5+50\sqrt{15}+30\sqrt3)p_1=-190p_2$$

$$\left(\frac{7+14\sqrt5+5\sqrt{15}+3\sqrt3}{19}\right)p_1=p_2$$

$$p=\left[\left(1,\ \frac{30+10\sqrt3+3\sqrt5}{19\sqrt5},\ \frac{7+14\sqrt5+5\sqrt{15}+3\sqrt3}{19}\right)\right]=$$

$$=\left[\left(19,\ 30\sqrt5+10\sqrt{15}+15,\ 7+14\sqrt5+5\sqrt{15}+3\sqrt3\right)\right]$$

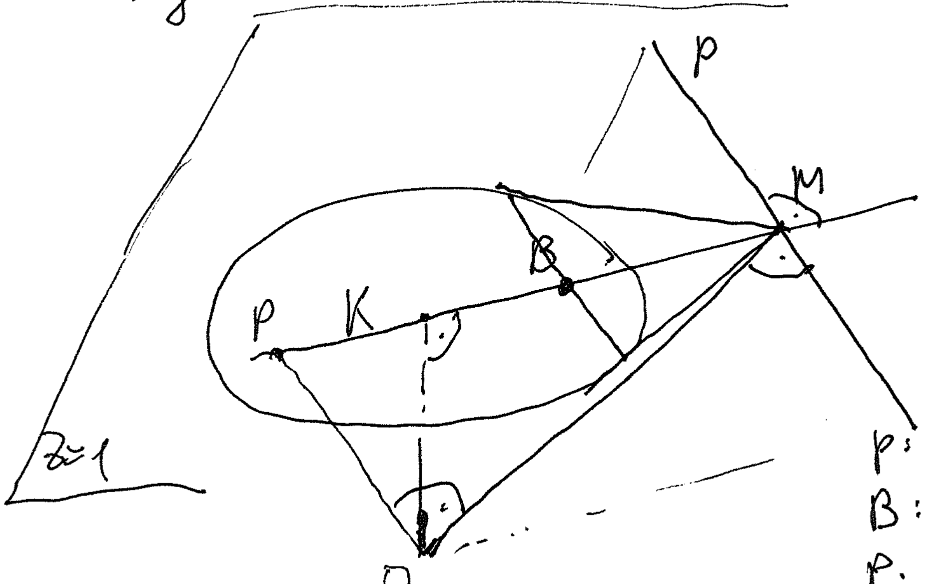
A Brianchon pont a Pascal egyenes polárisa az egységkörre a fenti azonosítással $A \mapsto a$, $B \mapsto b$, ... $F \mapsto f$.

A homogén koordinátákkal definíciója miatt a p homogén koordinátái, a 'p'-t síkbeli O-n átmenő sík normálvektorának (a síkra merőleges O-n átmenő egyenes által meghatározott P pont homogén koordinátái. Ezen P pont inhomogén koordinátái

$$P\left(\frac{19}{7+14\sqrt{5}+5\sqrt{15}+3\sqrt{3}},\ \frac{30\sqrt{5}+10\sqrt{15}+15}{7+14\sqrt{5}+5\sqrt{15}+3\sqrt{3}}\right).$$

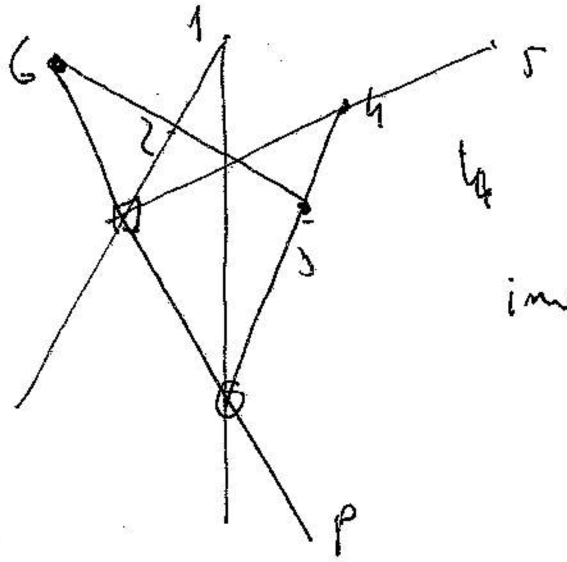
Azonban az K-ból 'p'-re a $z=1$ síkra állított merőleges ~~a kör vonatkozó~~ és 'p'-metszés pontjának M-nek az inverz képe a B-pont. Így az egységkör a 'p' pólusa a B-pont. Így $KB \cdot KM = 1$, ugyanakkor a $POM_\triangle$ derékszögű $\triangle$ (O-nál van a derékszög. Ezért OK a PM-re bocsátott merőleges szakasz, amire $|OK|=1$ $\Rightarrow$ a magasság tétel miatt $|KP||KM|=1$

így B a P tükörképe K-ra $B = \begin{pmatrix} -19 \\ -(30\sqrt{5}+10\sqrt{15}+15) \end{pmatrix} \Big/ (7+14\sqrt{5}+5\sqrt{15}+3\sqrt{3})$



p: Pascal egyenes
B: Brianchon pont
P: (O,p) sík normálisának $z=1$-el a metszéspontja

56 Pascal–Brianchon tétel alapján, vegyünk 1-4 ... egy tetszőleges egyenest, mely halad meg át 2, 3, 4, 5-ön. Ha ezen van a 6.



imaginárius (16) egyenest és a ... pont

$12 \cap 45 = B$

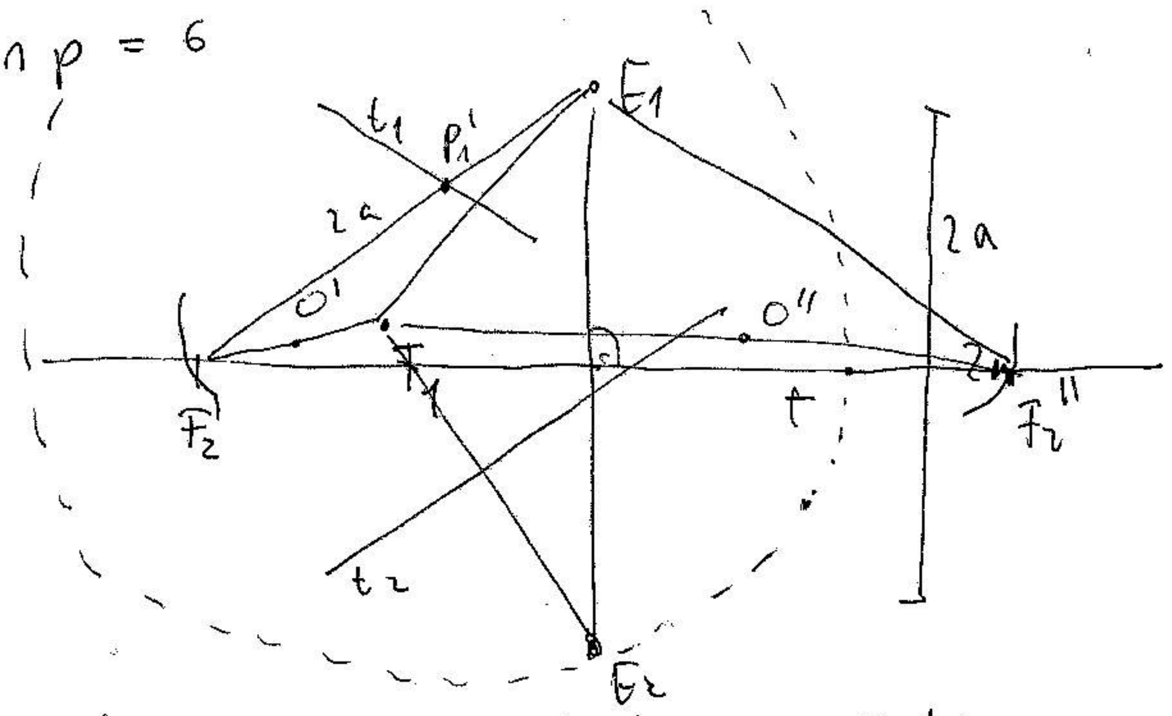
$23 \cap 56$

$34 \cap 61 = O$

pontok kollineárisak a 'p' Pappos egyenesre esnek =>

$23 \cap p = 6$

57



~~Készítsünk F_1 középponttal '2a' sugarú kört~~

F_1 tükörképe t_1-re E_1, F_1 tükörképe t_2-re E_2. A F_2 középpontú ellenkör Z pontja E_1, E_2 az középpontja a 'f' nekünk felüli merőlegesnek és sugara 2a, ezért F_2 ... = f az E_1 középpontú

'2a' sugarú kör} $\cap f$. Két megoldás van

F_2' és F_2''. A negyedik csúcspontjait az $\overline{F_1F_2'}$

illetve $\overline{F_1F_2''}$ szakaszok O' illetve O'' felezőpontja

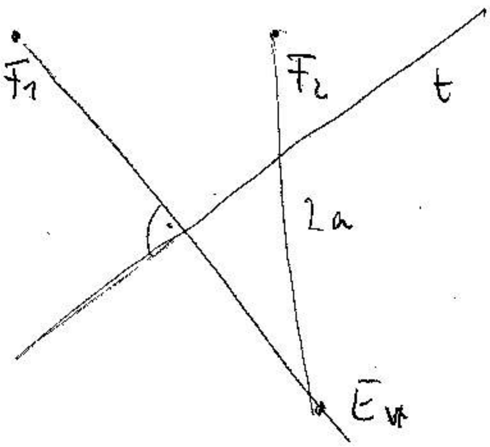
mint középpont köré rajzolt 'a' sugarú kör metszi

ki. A érintési pontokat az érintőkről az {$F_2'E_1$, illetve $F_2'E_2$}

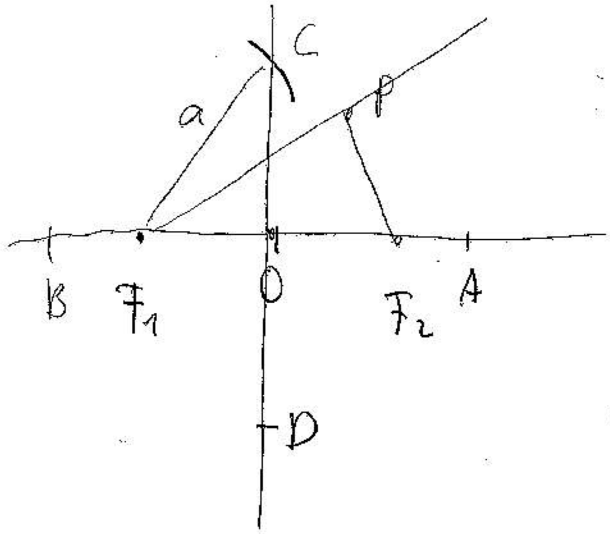
illetve {$F_2''E_1$, $F_2''E_2$} egyenesek metszik ki.

(58)

F_1 tükörképe t-re egy ellipszist E és $2a = |F_2E|$



(59)



$|PF_1| + |PF_2| = 2a$

$\overline{F_1F_2}$ felezőpontja O

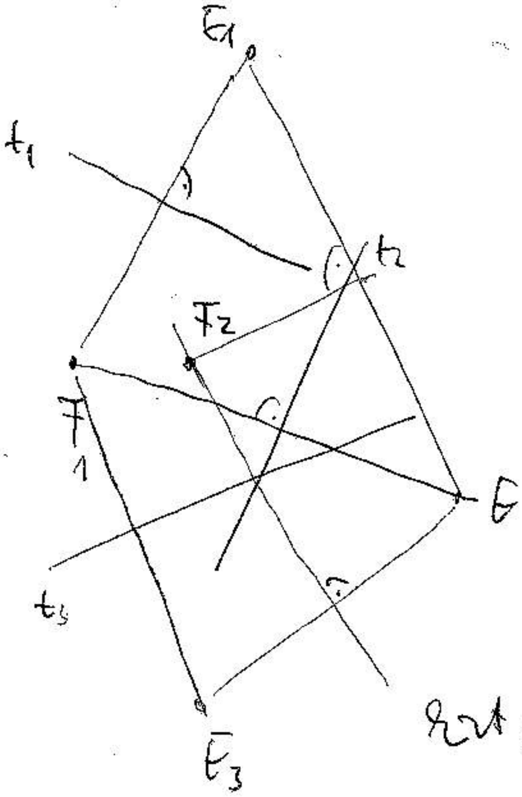
a centrum, $OA = OB = a$

F_1-től 'a' távolságra van

C, D és az O-ban AB-re

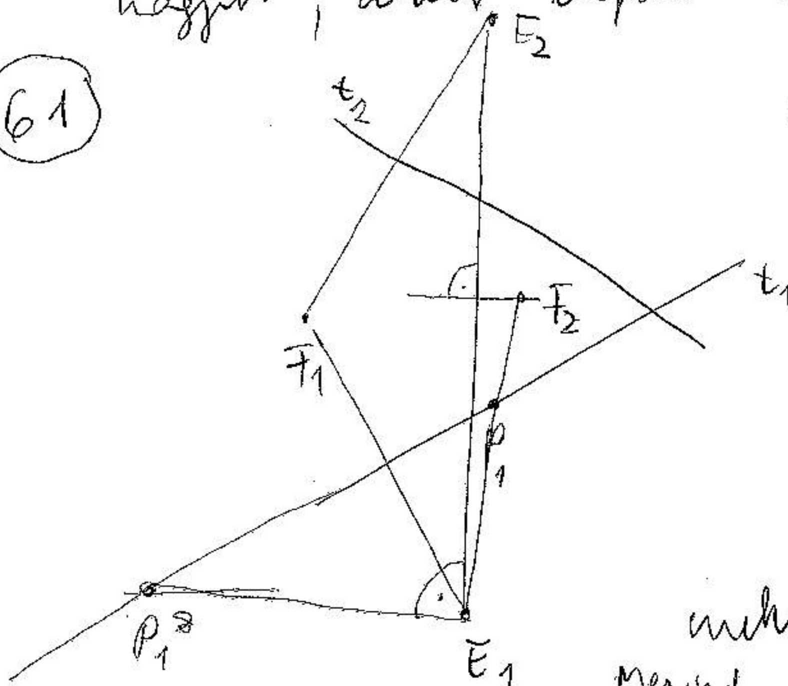
állított merőleges

(60)



A 3 tükörkép az ~~centrális kúpszelet~~ meghatározza egy kört vagy egyenest. Ha egyenes, akkor a keresett parabola és a d' vezéregyenes az egyenes, ha kör, akkor a keresett ellipszis vagy hiperbola és a másik fókusz F_2 a kör középpontja, ha az $|F_1F_2|=2c$ távolság az $|F_2E_1|=2a$ távolságnál kisebb, akkor ellipszis a keresett, ha nagyobb, akkor hiperbola.

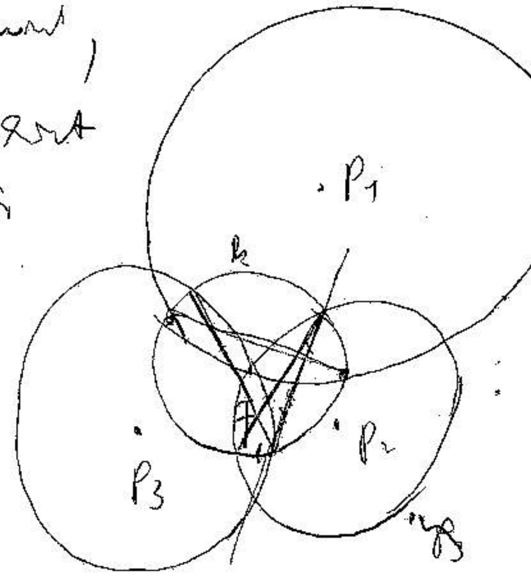
(61)



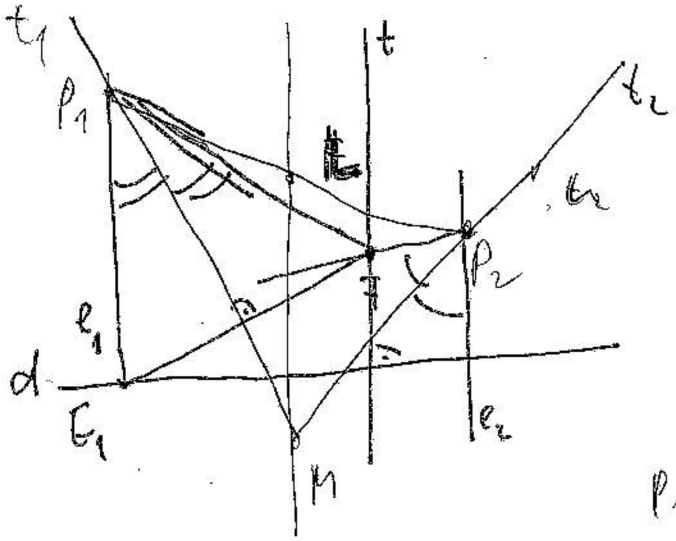
Az F_1 tükörképei E_1, E_2 t_1-re illetve t_2-re. Az $\overline{E_1E_2}$ szakaszfelező merőlegese és az E_1P_1 egyenes egyaránt tartalmazza az F_2 fókuszt, így ha van metszéspontjuk, azaz F_2 fókusz. Megvan $|\overline{F_1F_2}|=2c$ és $|\overline{E_1F_2}|=2a$ kiszámítása adja a centrális kúpszelet paramétereit. Ha ~~az párhuzamosak (de különbözők) akkor a m.o. parabola~~ ~~és az F_1-ből (E_1E_2)-vel húzott~~ párhuzamos egyenest
Ha nem párhuzamosak pld $P_1^*E_1 \perp E_1E_2$-re, akkor E_1E_2 a para

bolo veréregyenese is $\overline{P_1^8 E_1}$ a merőleges vektor
vetülete. Ezáltal az F_1-ből $\overline{E_1 E_2}$-re állított merőleges
nem ~~metsz~~ felezőpontja a középpont és az ezt tartalmazó
egyenes a tengely.

(62) Határozzuk meg az ellentmondásos definíciót! A három
pont megfelelő 3 kört, melyek közös pontja az
adott pont, és az ezzel ellentétes érintő kör, míg
ezt a 3 kört az ellentétes körrel, középpontja az F_2
pont.



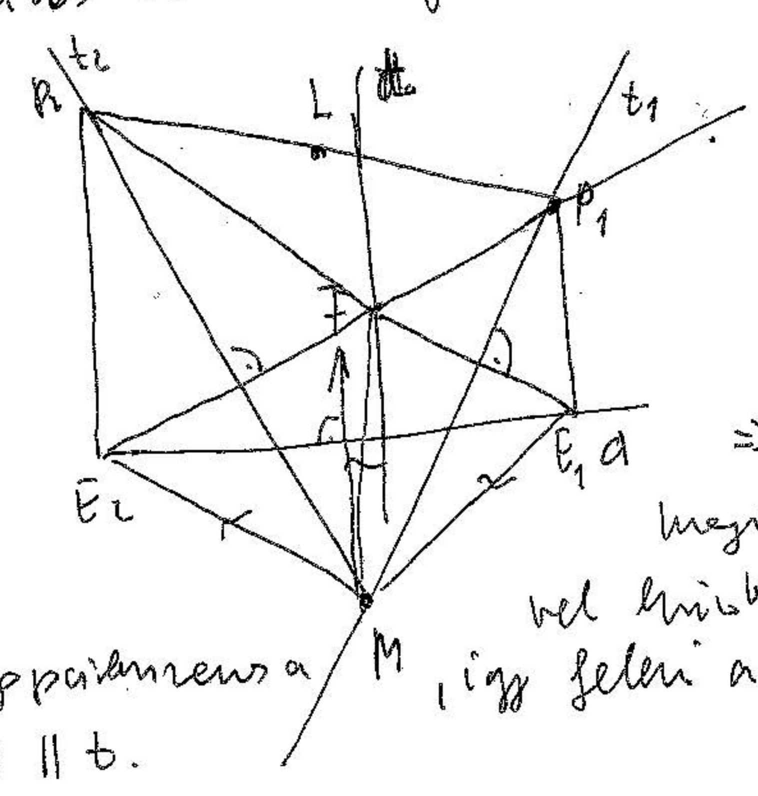
3 adott egy ponton ~~metsző~~ áthaladó kört ~~metszésit~~, érintő kör
~~szerkesztését~~ ~~egymást metsző körök~~ egységesnek inverzióval megoldani,
a kör F_1 pont körüli inverzió a 3 kört 3 nem
a körök áthaladó egyenesbe viszi (Ezeket érintő
egy pontra áthaladó egyenesbe viszi (Ezeket érintő
4 kört ~~megfelelő metszés~~ középpontjait megfelelő metszeteket
kell szerkeszteni, azaz a középpontból mért távolságával
az egyenestől, az invertált a kapott körökre alkalmazva
így megkapjuk a keresett érintő köröket (4 m.o.) így
a másik körrel 4 lehetőség adódik.
(Részletezzük végig egy megoldást!)



Legyen L a $\overline{P_1P_2}$ felezőpontja, ekkor LM a tengellyel párhuzamos (*), mert a P_1P_2-től a vezéregyenesre húzott merőlegesek ezzel az iránnyal párhuzamosak.

Az érintők a vezérsugarak szögét felezik, így az e_1, e_2 egyenesek tükörképei t_1-re illetve t_2-re átmennek a fókuszon, ezek metszéspontja az F a fókusz. A tengely t F-en keresztül halad és ezzel az iránnyal $\|$ és a 'd' vezéregyenes 2 pontja az F érintőkre vonatkozó tükörképeit adják.

(*) állítás bizonyítása az alábbi ábrából



t_1 a szakaszfelező merőleges FE_1-re

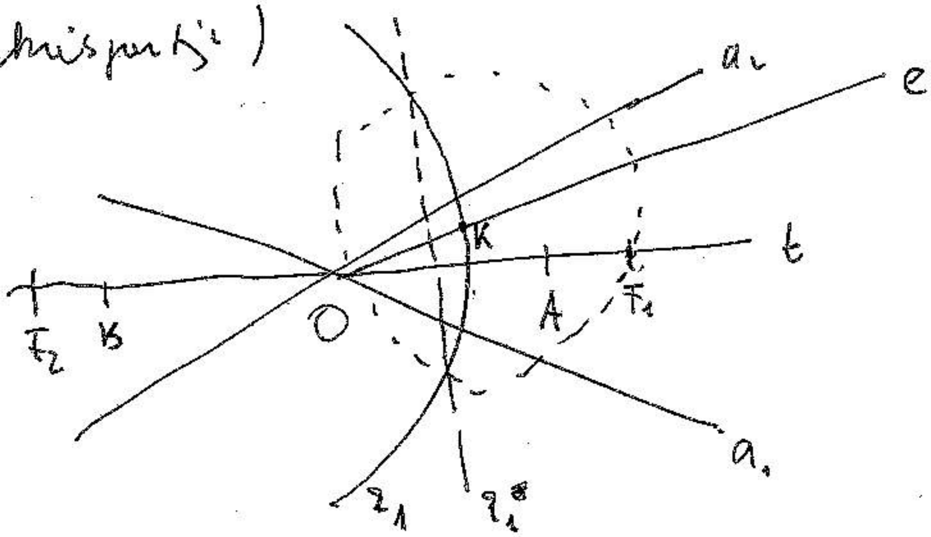
$|\overline{ME_1}| = |\overline{MF}|$ u. így $|\overline{ME_2}| = |\overline{MF}|$ $\Rightarrow$

$ME_1E_2 \triangle$ egyenlőszárú $\Rightarrow$ M-ből induló súlyvonal magasság is $\Rightarrow$ M-ből 't'-vel húzott $\|$ a (P_1E_1), (P_2E_2) egyenesek középpárhuzamosa, így felezi a P_1P_2-szakaszt $\Rightarrow$ $LM \| t$.

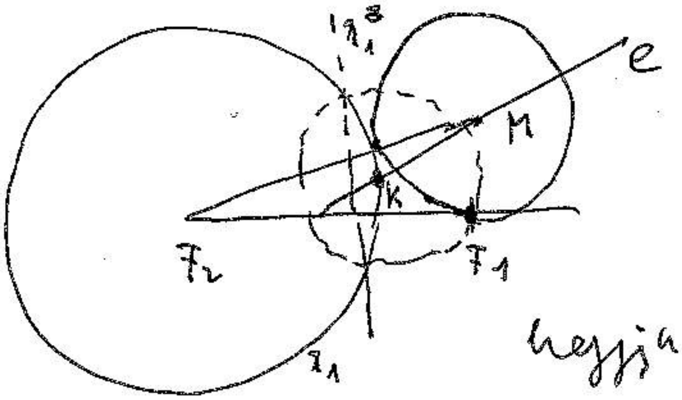
félegyenessel, ekkor így megkapjuk az OP egyenesen a P'-pontot, majd alkalmazzuk az O-centrumú $P' \mapsto P$ nyújtást. Ez $q' \mapsto q$-ba viszi $\Rightarrow q \cap t = F_1$; $q \cap a_2 = R$ és így adódik az A csúcspont is.

<u>Részletesen</u>

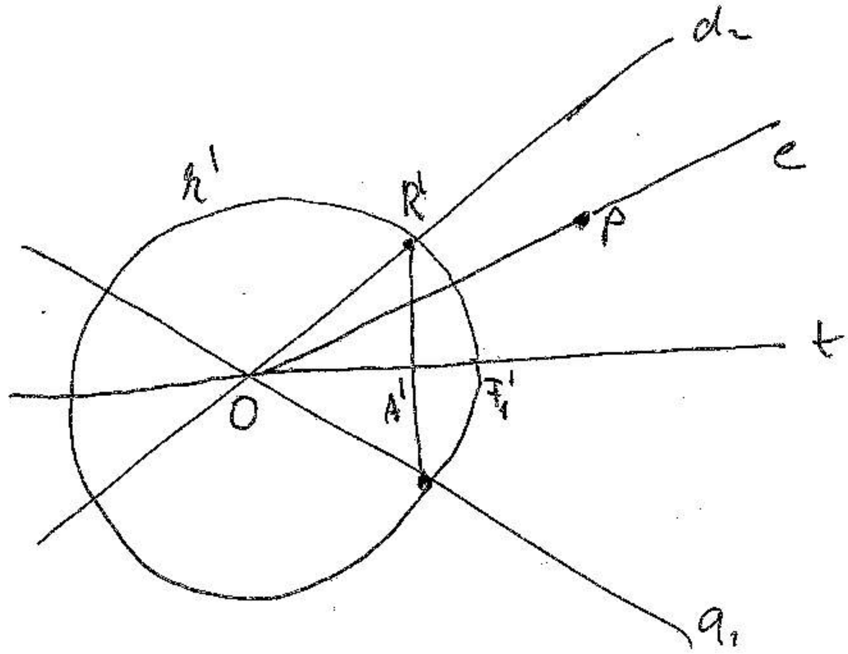
(Adott csúcspontok O-n áthaladó egyenessel való metszéspontjai)



A keresett metszéspont M rajta van 'e' egyenesen és középpontja egy olyan e-n levő körnek, mely F_1-en áthalad és érinti a 'q_1' F_2 középpontú vezérkört. Végpont ~~[illegible]~~ alkalmazzuk azt a kört, mely középpontja $e \cap q_1$ és átmegy F_1-en.

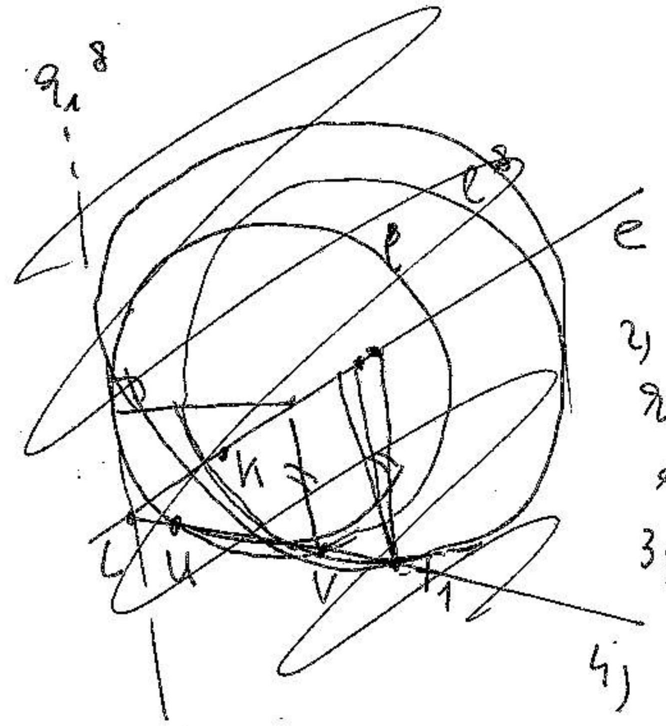


Az inverzió F_1-et helyben hagyja 'e'-t invariánsan q_1-et pedig a q_1^* egyenesbe viszi. Olyan kört keresünk, mely érinti q_1^*-t átmegy F_1-en és középpontja e-n van

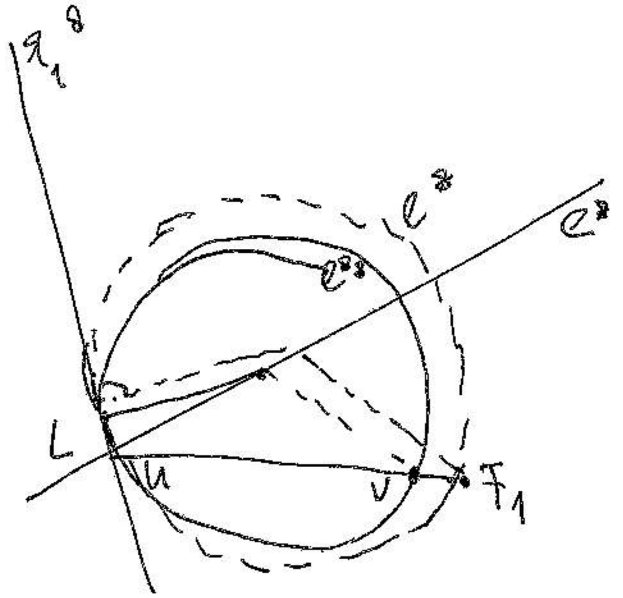


A rajzolásban azt használjuk ki, hogy az adott aszimptotájú hiperbolák a O centrumú középpontos hasonlóság. Ez azon múlik, hogy a ~~fókusz~~ fókuszokon keresztülhaladó kör O-középpontú az aszimptotákat a csúcspontbeli érintő pontjában metszi (*). Ezért ha a_1, a_2 aszimptotájú

az (F_1', F_2', A', B') illetve (F_1'', F_2'', A'', B'') hiperbolákra és alkalmazzuk azt a O-centrumú nyújtást, hogy $F_1' \mapsto F_1''$-be viszi, akkor ez a k' kört k''-be viszi az a_1, a_2 egyeneseket invariánsan hagyja így $R' \mapsto R''$-be viszi $\Rightarrow$ A'-t A''-be viszi. Végül ezért egy tetszőleges k' kört, ami tükrözi az F_1' fókuszt a valós tengelyen az R' pontot az 'a_2' aszimptotától így megkaphatjuk az A' csúcspont. Az $(F_1' F_2' A' B')$ hiperboláról szerkeszthetjük meg a metszéspontjait az OP



1, $L = e \cap k_1^8$
2, l tetszőleges kör, hogy szeparálja e-t és érinti k_1^8-t
3, $LF_1 \cap l = \{U, V\}$
4, L-ből nagyítás (2 m.o.
l^{88}-t úgy, hogy U vagy V F_1-be menjen
két metszéspont) kapjuk.



l^8-t invertáljuk vissza, kapjuk az l-kört, amelyik szeparálja a keresett M pont

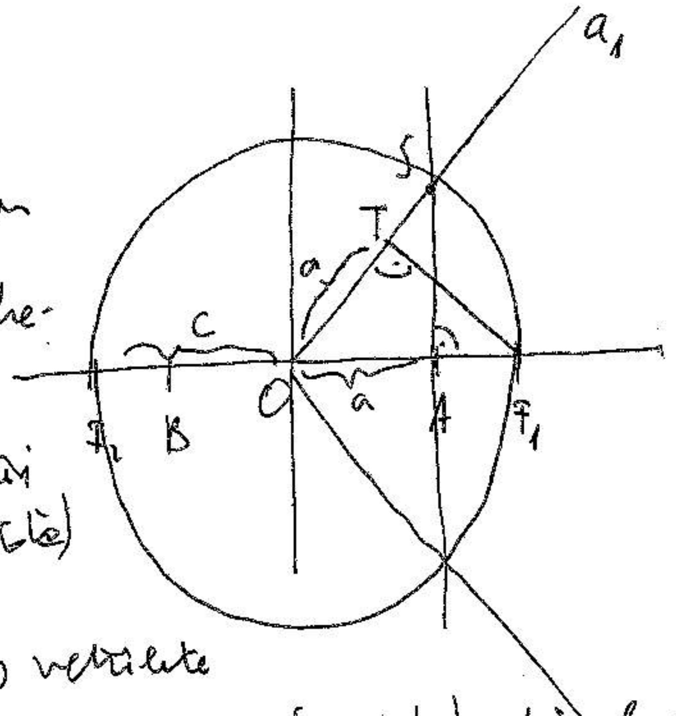
Mj: Van hiperbola és egyenes metszéspontjain más invertálást nem használó megoldása is.

(8) állítás bizonyítása:

63

Alkalmazásra:

2c: fókusztávolság
2a: valós tengely hossz
a_1: O-ponton áthaladó érintő ∞ távoli érintési ponttal (aszimptota)

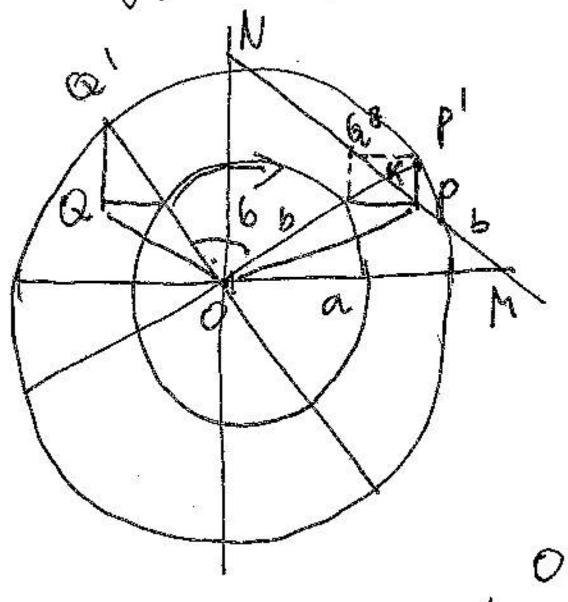


⇒ F_1 merőleges vetülete a_1-re a kör pontja így 'a' távolságra van O-tól

A-ban OA-ra állított merőleges metszete a_1-el

S. OF_1T_Δ hasonló OSA_Δ-el ⇒ mert egyeznek a szögeik. de $OT \longleftrightarrow OA$ megfelelő oldalak és mindkettő 'a' hosszúságú ⇒ $OF_1T_\Delta \cong OSA_\Delta$ ⇒ $\overline{OS} \cong \overline{OF_1}$ így ~~[illegible]~~ S az O-középpontú F_1-en áthaladó kör pontja

(65) Az affin definíciójából indulunk, 2 átmérő konjugált, ha merőleges köri átmérők affin képei.

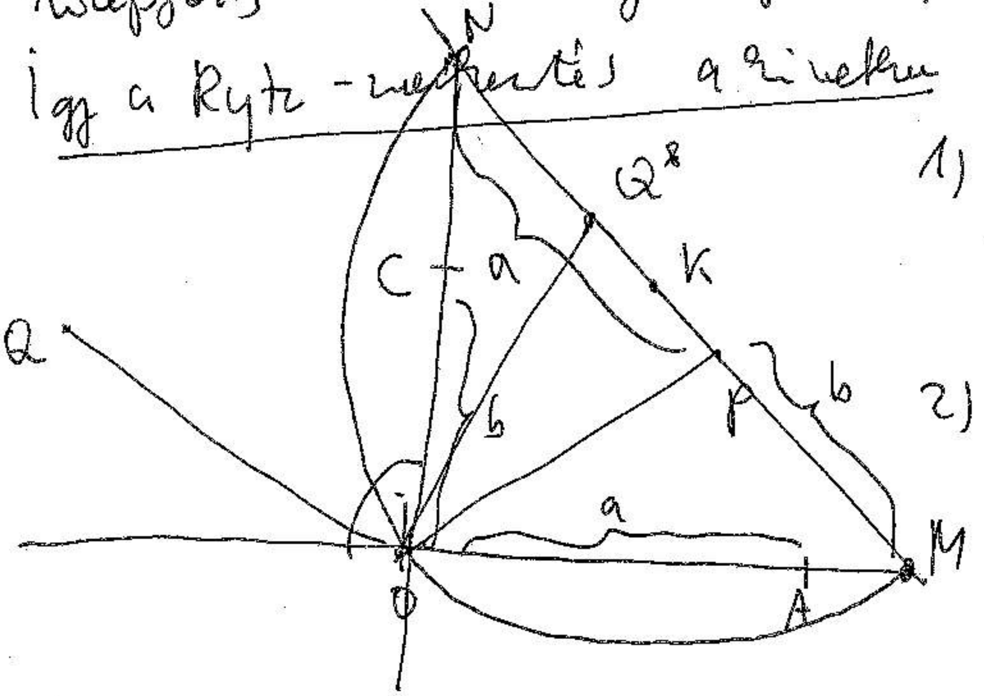


OP, OQ konjugáltak, akkor OP', OQ' ⊥ köri átmérőpárok, melyeket a $\lambda = \frac{b}{a}$ arányú affinitással nézzünk. Forgassuk az OQ'Q-t 90°-al így OQ' rendje P'-ban

Ezután Q-hoz Q* és egy téglalap jön létre a két tengely irányában. (Vízszintes függőleges oldal, függőleges vízszintes) ⇒ A téglalap középpontja K egyenlő távol van O-tól, M-től és N-től ($N = Q^*P \cap$ függőleges $M = Q^*P \cap$ vízszintes)

hiszen $NOM_\triangle$ is egy téglalap fele K pedig a középpontja ennek a téglalapnak), azaz $|KO| = |MK| = |KN|$

<u>Így a Rytz-szerkesztés a következő</u>



1) Keressük meg Q*-t OQ 90°-os elforgatásával

2) Keressük meg K-t ($\overline{Q^*P}$ felezőpontja) és rajzoljunk egy kört K középponttal O-n keresztül ⇒ M, N. 3) MO, NO a két tengely egyenese 4) $|\overline{PM}| = b$ és $|\overline{PN}| = a$ a kistengely és a nagytengely hossza. Ezeket felmérve rajzoljuk a csúcspontokat