0.1. Topológiai alapfogalmak, összefüggőség, kompaktság, homeomorfia.

Legyen a továbbiakban X tetszőleges ponthalmaz. A $\mathcal{G}$ halmazrendszer elemei legyenek X részhalmazai.

0.1.1. Definíció. *Ha a $\mathcal{G}$ halmaz teljesíti a következő tulajdonságokat:*

$\emptyset, X \in \mathcal{G}$,

unióra zárt *(ha $i \in \mathcal{I}$ esetén $G_i \in \mathcal{G}$ akkor $\bigcup G_i \in \mathcal{G}$),*

véges metszet zárt *(ha $i = 1, \cdots, n$ esetén $G_i \in \mathcal{G}$ akkor $\bigcap G_i \in \mathcal{G}$),*

akkor azt mondjuk, hogy az $\{X, \mathcal{G}\}$ pár egy **topológikus tér** *a $\mathcal{G}$ nyílthalmaz rendszerrel, amelynek elemei a tér nyílt halmazai.*

A nyílt halmazok X-re vonatkozó komplementerei a zárt halmazok. Legyen $H \subset X$ halmaza a topológikus térnek. A B pont **belső pontja** H-nak, ha van olyan $G \in \mathcal{G}$ nyílt halmaz, hogy $B \in G \subset H$ teljesül. A H komplementerének H^c-nek belső pontjait H **külső pontjainak** nevezzük. H **határpontjai** az X azon pontjai, amelyek nem belső és nem külső pontjai H-nak.

0.1.1. Lemma. *H pontosan akkor nyílt halmaz, ha minden pontja belső pont, és pontosan akkor zárt ha összes határpontját tartalmazza.*

0.1.1. Megjegyzés. *Minden metrikus tér indukál egy topológiát, amelyben a nyílt halmazok a nyílt gömbökből a végesmetszetre illetve unióra való lezárás útján adódnak. Ezt a metrika által indukált topológiának nevezzük. Nem nehéz igazolni, hogy az n-dimenziós euklideszi tér nyílt halmazai tartalmaznak nyílt metrikus gömböt.*

0.1.2. Definíció. *A $\{X, \mathcal{G}\}$ topológikus tér X' részhalmaza a $\mathcal{G}' := X' \cap \mathcal{G}$ nyílt halmazok rendszerével topológikus térré tehető. Az így kapott topológikus teret az eredeti alterének nevezzük.*

0.1.3. Definíció. *Az $\{X, \mathcal{G}\}$ topológikus tér* **összefüggő**, *ha nem bomlik fel két nem üres diszjunkt, nyílt halmazának uniójára.*

A továbbiakban először topológikus terek folytonos leképezéseivel foglalkozunk.

0.1.4. Definíció. *Az $f : \{X, \mathcal{G}\} \longrightarrow \{X', \mathcal{G}'\}$ leképezés folytonos, ha nyílt halmaz teljes inverz képe nyílt.*

0.1.5. Definíció. *Az* $f : \{X, \mathcal{G}\} \longrightarrow \{X', \mathcal{G}'\}$ *leképezés* **homeomorfizmus**, *ha folytonos, invertálható és az inverz függvény is folytonos. Ha van* $f : \{X, \mathcal{G}\} \longrightarrow \{X', \mathcal{G}'\}$ *homeomorfizmus akkor azt mondjuk, hogy az* $\{X, \mathcal{G}\}$ *illetve* $\{X', \mathcal{G}'\}$ *topológikus terek* **homeomorfak** *(vagy topológikusan ekvivalensek) egymással.*

0.1.2. Megjegyzés. *Könnyű találni olyan példát, hogy invertálható folytonos leképezés inverze nem folytonos, ezért a homeomorfia fogalma általában nem egyszerűsíthető. Tekintsük ugyanis az* $(X, \mathcal{P}(X))$, $(X, \emptyset)$ *topológikus tereket, ahol* $\mathcal{P}(X)$ *az* X *összes részhalmazát tartalmazó halmaz. A függvény legyen az alaphalmaz identitása. Ez világos módon invertálható, mint* $id : (X, \mathcal{P}(X)) \longrightarrow (X, \emptyset)$ *leképezés folytonos az inverze viszont nem az.*

A másik oldalról viszont megmutatható, hogy egy euklideszi téren értelmezett folytonos bijekció inverze is folytonos. (v.ö $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *függvény inverzére vonatkozó ismert tétellel.)*

0.1.6. Definíció. *Az euklideszi tér egy szakasza mint a topológikus tér egy altere a származtatott topológiával szintén topológikus tér.* **Elemi ívnek** *nevezzük ezen tér homeomorf képeit.*

Igazolható, hogy elemi görbeív meghatározza végpontjait.

0.1.7. Definíció. *Két pontja a topológikus térnek* **ívvel összeköthető**, *ha találunk véges sok elemi ívet, melyek végpontjaikban szabályosan csatlakoznak egymáshoz, azaz két végpont kivételével valamennyi végpont pontosan két ívhez tartozik, és a két szabad (csak egy ívhez tartozó) végpont a két adott pont. A topológikus tér* **ívszerűen összefüggő**, *ha tetszőleges két pontja ívvel összeköthető.*

0.1.1. Tétel. *Ívszerűen összefüggő topológikus tér összefüggő. Fordítva ez nem igaz, a* $\{\sin \frac{1}{x} | x \in \mathbb{R} \setminus 0\} \cup \{(0, y) | y \in [-1, 1]\}$ *alaphalmaz az* $\mathbb{R}^2$ *szokásos topológiája által indukált altér topológiára nézve összefüggő, három ívszerű komponensből álló topológikus tér.*

Alapvető jelentőségű fogalom a topológikus tér kompaktságának fogalma.

0.1.8. Definíció. *Az* $\{X, \mathcal{G}\}$ *topológikus tér* **kompakt**, *ha tetszőleges nyílt halmazokból álló fedőrendszeréből kiválasztható véges fedőrendszer, azaz ha* $\bigcup\{G_i \in \mathcal{G} | i \in \mathcal{I}\} \supset X$ *teljesül, akkor* $\exists \{i_1, \cdots, i_\sigma\} \subset \mathcal{I}$ *úgy, hogy* $\bigcup\{G_{i_j} | j = 1, \cdots, \sigma\} \supset X$ *is fennáll.*

Először vizsgáljuk meg kompaktság egyik térről a másikra vonatkozó átvitelének lehetőségeit.

0.1.2. Tétel. *Kompakt tér zárt részhalmazai kompaktak.*

0.1.3. Tétel. *Kompakt tér folytonos képe kompakt.*

0.1.9. Definíció. *A topológikus tér* **Hausdorff-féle** *(vagy rendelkezik a T_2 tulajdonsággal) ha tetszőleges két pontjához található olyan diszjunkt nyílt halmazpár melynek egyike az egyik, másika a másik pontot tartalmazza.*

0.1.4. Tétel. *Hausdorff tér kompakt részhalmazai zártak.*

A következő tétel képezi az alapot a homeomorfia definíciója után tett megjegyzésünk bizonyításához.

0.1.5. Tétel. *Legyen $f : (X_1, \mathcal{G}_1) \longrightarrow (X_1, \mathcal{G}_1)$ folytonos injekció, ahol $(X_1, \mathcal{G}_1)$ kompakt, $(X_2, \mathcal{G}_2)$ Hausdorff-féle topológikus terek. Ekkor $f : X_1 \longrightarrow \mathcal{R}(f)$ homeomorfizmus.*

A következő tételek jól mutatják egy metrikus tér korlátos és zárt részhalmazai illetve kompakt halmazai között fennálló kapcsolatot.

0.1.10. Definíció. *Az (X, ϱ) párt* **metrikus térnek** *nevezzük, ha $\varrho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ nem negatív értékű szimmetrikus függvény, mely teljesíti a háromszögegyenlőtlenséget és pontosan akkor nulla, ha mindkét változójába ugyanazt a pontot helyettesítjük. (Azaz $\varrho(P, Q) \geq 0$, ha $\varrho(P, Q) = 0$ akkor $P = Q$, $\varrho(P, Q) = \varrho(Q, P)$ végül $\varrho(P, Q) + \varrho(Q, R) \geq \varrho(P, R)$.) Magát a fenti tulajdonságokkal rendelkező függvényt metrika függvénynek vagy röviden* **metrikának** *nevezzük.*

0.1.3. Megjegyzés. *Minden metrikus térben megadható a nyílt gömb fogalma a szokott módon, a nyílt gömböket nyílt halmaznak tekintve, majd végesmetszetre és unióra ezt a halmazrendszert lezárva egy olyan halmazrendszerhez jutunk, mely topológiát ad meg az alaphalmazon. Ezt a topológiát a metrika indukálta topológiának nevezzük.*

Metrikus térben értelmes a korlátosság fogalma, **korlátosnak** nevezünk egy halmazt, ha tartalmazza egy gömb.

0.1.6. Tétel. *Metrikus tér kompakt részhalmazai korlátosak.*

A két tétel alapján mondhatjuk, hogy metrikus tér kompakt részhalmazai korlátosak és zártak. (Világos hogy minden metrikus tér Hausdorff féle.) Ezen állítás megfordítása nem igaz. Tekintsük ugyanis az X téren azt a metrikát, mely két különböző ponthoz az 1 értéket rendeli. (Ha a két argumentumba ugyanazt a pontot tesszük 0-t kell felvennie értékként.) A metrikában nyílt gömbök maguk az egyelemű halmazok, így az indukált topológia nyílt halmazai a $\mathcal{P}(X)$ halmazrendszer. Egy végtelen halmaza a térnek nem lehet kompakt, de nyilván korlátos és zárt is mert a zárthalmazok rendszere is $\mathcal{P}(X)$.

Euklideszi térben azonban igaz a Borel-féle fedési tétel:

0.1.7. Tétel (Borel). *Az n-dimenziós euklideszi tér korlátos és zárt részhalmazai kompaktak.*

Így euklideszi tér kompakt részhalmazai éppen a korlátos és zárt halmazok.