Analízis feladatok és megoldások

Jákli Gyula és Mádi-Nagy Gergely

1. Sorozatok

Számoljuk ki az alábbi sorozatok határértékét:

1.1. $\dfrac{4n+3}{2n+100}$

1.2. $\dfrac{4n^2+3n+2}{2n+100}$

1.3. $\dfrac{4n+3}{2n^2-100n}$

1.4. $\dfrac{4n^3+5n^2}{2n^3-100n^2}$

1.5. $\dfrac{3n^2-5n^4}{4n^3+10n^4}$

1.6. $\dfrac{2n^5-4n^4+5n^3-2n^2+n+12}{3n^2-n^3-2n^4-4n^5}$

1.7. $\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2-1}$

1.8. $\dfrac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n-1)}$

1.9. $\dfrac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3+n^2}$

1.10. $\dfrac{2-4^n}{7^{n+1}}$

1.11. $\dfrac{5^n-3}{2-3^n}$

1.12. $\dfrac{7^{n+2}+(-1)^n}{7^n-7}$

1.13. $\dfrac{3^{2n+1} - 3 \cdot 5^n}{2 \cdot 9^n + 100 \cdot 5^n}$

1.14. $\dfrac{2^{3n+2} - 5 \cdot 3^n}{7 \cdot 3^n - 6 \cdot 8^n}$

1.15. $\dfrac{2 - 3^n}{7^n + 4^n - 3}$

1.16. $\dfrac{\sqrt[3]{n^6 + 2n^3 + 100n^2}}{\sqrt[4]{n^3 + 3n^2} + \sqrt{n^4 + 3n}}$

1.17. $\dfrac{\sqrt[4]{16n^8 - 4n^6 + 9}}{\sqrt[3]{6n^2 - n} + \sqrt[5]{n^{10} + 10n^5 - n^3}}$

1.18. $\dfrac{\sqrt{n^6 - 4n^3}}{\sqrt[3]{27n^9 + 31n^2 - 12} - \sqrt[3]{8n^2 + 2n}}$

1.19. $\sqrt{n+7} - \sqrt{n+1}$

1.20. $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)\sqrt{n}$

1.21. $\sqrt{3n^2 - 2} - n$

1.22. $\dfrac{\sqrt{4n-2} - \sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+1}}$

1.23. $\dfrac{n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$

1.24. $\dfrac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}$

1.25. $\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^{100}$

1.26. $\left(1 + \dfrac{3}{100}\right)^{n}$

1.27. $\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^{n}$

1.28. $\left(\dfrac{5n+10}{5n}\right)^{2n+3}$

1.29. $\left(\dfrac{n+3}{n-1}\right)^{2n-2}$

1.30. $\left(\dfrac{n+2}{n-2}\right)^{\frac{n}{4}}$

1.31. $\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+2}$

1.32. $\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^{\frac{n+1}{2}}$

1.33. $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n}$

1.34. $(-1)^n 10^n + 1$

1.35. $(-1)^n \dfrac{1}{10^n} + 1$

1.36. $1 + (-1)^n \dfrac{n-1}{n}$

1.37. (*) $\sqrt[n]{5n+1}$

1.38. (*) $\sqrt[n]{n^2+3}$

Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából. Számoljuk ki határértéküket, ha létezik!

1.39. $a_n = \dfrac{n+2}{n+5}$

1.40. $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

1.41. $a_n = \dfrac{2-3n}{n+5}$

1.42. $a_n = n^2 + 2n - 8$

1.43. $a_n = \dfrac{3^{n+1}}{1-3^n}$

1.44. (*) $a_n = \dfrac{10^{n+2}}{n!}$

2. Függvények határértéke, folytonossága

Számoljuk ki az alábbi függvények véges helyen vett határértékét:

2.1. $\lim\limits_{2} \dfrac{4-x^2}{x+2}$,

2.2. $\lim\limits_{-2} \dfrac{x^3-x}{x-2}$,

2.3. $\lim\limits_{2} \dfrac{\sqrt{x+2}+1}{x^2+2}$,

2.4. $\lim\limits_{-1} \dfrac{x^2+x-1}{x^2-x}$,

2.5. $\lim\limits_{3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$,

2.6. $\lim\limits_{-5} \dfrac{x^2-25}{x+5}$,

2.7. $\lim\limits_{1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$,

2.8. $\lim\limits_{3} \dfrac{2x^2-12x+18}{3x-9}$,

2.9. $\lim\limits_{2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}$,

2.10. $\lim\limits_{1} \dfrac{2x^2-12x+18}{3x-9}$,

2.11. $\lim\limits_{1} \dfrac{3x^2+6x-9}{x^2-3x+2}$,

2.12. $\lim\limits_{-5} \dfrac{x^2+7x+10}{5-4x-x^2}$,

2.13. $\lim\limits_{2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$,

2.14. $\lim\limits_{1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$,

2.15. $\lim\limits_{4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$, 2.16. $\lim\limits_{0} \dfrac{e^x - 1}{x}$,

2.17. $\lim\limits_{0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$,

2.18. $\lim\limits_{0} \dfrac{e^x - 1}{e^{3x} - 1}$,

2.19. $\lim\limits_{0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2 - x}$,

2.20. $\lim\limits_{0} \dfrac{8^x - 2^x}{2x}$,

2.21. $\lim\limits_{1} e^{\frac{4}{|1-x|}}$,

2.22. $\lim\limits_{1} e^{\frac{\sqrt[3]{1-x}}{x}}$,

2.23. $\lim\limits_{0} e^{\frac{e^x - 1}{x}}$,

Számoljuk ki az alábbi függvények határértékét:

2.24. $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{5x^2 - 6x + 1}{x^2 - 100x}$,

2.25. $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{5x^2 - 6x + 1}{x^2 - 100x}$,

2.26. $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{2 \cdot 3^x - 5^{x+1}}{7 \cdot 4^x}$,

2.27. $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{3 \cdot 6^{2x} - 12 \cdot 7^x}{6 \cdot 5^{2x+1} + 36^x}$,

2.28. $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + 5x}}{x + \sqrt{9x^2 + x}}$,

2.29. $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^6 - 2x} - \sqrt[4]{x^8 + 3x^5}}{\sqrt{9x^2 + 3x} - \sqrt[5]{x^{10} - 10x^5}}$,

2.30. $\lim\limits_{+\infty} \left(\sqrt{x - 3} - \sqrt{x}\right)$,

2.31. $\lim\limits_{+\infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x - 1}\right)$, 2.32. $\lim\limits_{+\infty}\left[\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right)x\right]$,

2.33. (*) $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{lnx}{x}$,

2.34. (*) $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{2^x}{x^2}$,

2.35. $\lim\limits_{-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^2$,

2.36. $\lim\limits_{+\infty}\left(\dfrac{x^5-3}{x^5}\right)^{3x^5}$,

2.37. $\lim\limits_{-\infty}\left(\dfrac{x^4-3}{x^4}\right)^{3x^4}$,

2.38. $\lim\limits_{-\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$,

2.39. $\lim\limits_{-\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x}$,

2.40. $\lim\limits_{-\infty}\left(\dfrac{x^5-3}{x^5}\right)^{3x^5}$,

2.41. $\lim\limits_{-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^{2x^2}$,

2.42. $\lim\limits_{+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^3-2}\right)^{\frac{x^3}{2}}$,

2.43. $\lim\limits_{+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^x$,

Állapítsa meg, hogy folytonosak-e az alábbi függvények:

2.44. $f(x)=\begin{cases} e^x, \text{ ha } x\geq 0 \\ x^2+1, \text{ ha } x<0 \end{cases}$

2.45. $f(x)=\begin{cases} lnx, \text{ ha } x\geq 1 \\ 2x-2, \text{ ha } x<1 \end{cases}$

2.46. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} - 1, \text{ ha } x \geq -1 \\ |x| - 2, \text{ ha } x < -1 \end{cases}$

2.47. $f(x) = \begin{cases} 2^{x-2}, \text{ ha } x \geq 2 \\ -\sqrt{2-x}, \text{ ha } x < 2 \end{cases}$

2.48. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, \text{ ha } x \neq 0 \\ 1, \text{ ha } x = 0 \end{cases}$

2.49. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3}, \text{ ha } x \neq -3 \\ -6, \text{ ha } x = -3 \end{cases}$

2.50. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, \text{ ha } x \neq 0 \\ 0, \text{ ha } x = 0 \end{cases}$

2.51. $f(x) = \begin{cases} e^x - e^{-x}, \text{ ha } x \neq 0 \\ 0, \text{ ha } x = 0 \end{cases}$

3. Differenciálszámítás

Adjuk meg az alábbi függvények deriváltját:

3.1. $3x^6 - 2x^5 + 2$

3.2.

3.3.

3.4.

3.5. $\sqrt{x}$

3.6. $\sqrt[5]{x^3\sqrt{x^7}}$

3.7.

3.8.

3.9. $\dfrac{x^5 + 3x^2}{x^3 - \sqrt{x^3}}$

3.10.

3.11.

3.12.

3.13. $x^2 + 2^x + \log_2 x + \ln 2$

3.14.

3.15.

3.16. $(2x^4 + \ln x)(e^x - 2\frac{1}{\sqrt{x}})$

3.17.

3.18.

3.19. $\dfrac{3^x - 2\ln x}{3x^{100} - \sqrt[3]{x^2}}$

3.20.

3.21.

3.22. $\ln 2x^2 + 3$

3.23. $(\ln x + 3)^4$

3.24. $e^{3\sqrt{x}+2x}$

3.25. $2^{\frac{1}{x}}$

3.26.

3.27.

3.28.

3.29.

3.30.

3.31.

3.32.

3.33.

3.34.

3.35. $\ln x\sqrt{3e^x+5x^9}$

3.36. $\dfrac{\sqrt{\ln x+3^x}}{e^x-2}$

3.37.

3.38.

3.39.

3.40.

3.41.

3.42. x^x

3.43. $\sqrt[x]{x}$

3.44. x^{x^5-5x}

3.45.

3.46.

3.47.

Adja meg az alábbi függvények x_0 pontbeli érintője egyenletét:

3.48. $f(x)=x^3 \quad x_0=2$

3.49. $e^{\sqrt{x}} \quad x_0=\dfrac{9}{4}$

3.50.

3.51.

3.52.

3.53.

Adjuk meg az alábbi függvények másodrendű deriváltfüggvényét:

3.54. $f(x)=2x^6+3x^2-e^2$

3.55. $f(x)=5^{3x}$

3.56.

3.57.

3.58.

3.59.

3.60.

4. Függvényvizsgálat

Végezzünk teljes vizsgálatot az alábbi függvényeken:

4.1. $f(x) = x^3 - x^5$

4.2. $f(x) = 5\dfrac{x-5}{x-3}$

4.3.

4.4.

4.5.

4.6.

4.7.

4.8.

5. Integrálszámítás

Az elemi függvények primitív függvényei segítségével számoljuk ki az alábbiakat:

5.1. $\int x^4 dx$

5.2. $\int 3\sqrt[4]{x} dx$

5.3. $\int 2^x + \dfrac{5}{x} - \dfrac{6}{x^2} + 2dx$

5.4.

5.5. $\int \dfrac{x^2 - 2x + 5}{\sqrt{x}} dx$

5.6.

5.7.

5.8.

5.9.

Az $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ azonosság segítségével adjuk meg az alábbiakat:

5.10. $\int (7x+125)^{12} dx$

5.11. $\int \sqrt{7x+125}\, dx$

5.12. $\int 5^{2-x} dx$

5.13.

5.14.

5.15.

5.16.

5.17.

5.18.

Az $\int f^{\alpha}(x)f'(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$ illetve az $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$ segítségével számoljuk ki az alábbiakat:

5.19. $\int 2x\sqrt{x^2+1}\, dx$

5.20. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

5.21. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$

5.22. $\int \frac{15}{3x+5} dx$

5.23. $\int \frac{\ln x}{x} dx$

5.24. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

5.25. $\int \frac{e^x + x}{2e^x + x^2} dx$

5.26.

5.27.

5.28.

5.29.

5.30.

5.31.

5.32.

A parciális integrálás $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$ képlete segítségével számoljuk ki:

5.33. $\int x5^x dx$

5.34. $\int \ln x dx$

5.35. $\int x^2 \ln x dx$

5.36. $\int \ln^2 x dx$

5.37.

5.38.

5.39.

Vegyes feladatok:

5.40.

5.41.

5.42.

5.43.

5.44.

Adjuk meg az alábbi határozott integrálokat:

5.45. $\int_{-1}^{3} x^4 dx$

5.46. $\int_{-3}^{-1} (x+1)^3 dx$

5.47. $\int_{1}^{3} \ln x dx$

5.48.

5.49.

5.50.

5.51.

5.52.

Határozzuk meg az alábbi függvények görbéi által bezárt síkidom területét:

5.53. $f(x) = x^2$, $g(x) = 8 - x^2$

5.54. $f(x) = \frac{5}{x}$, $g(x) = 6 - x$

5.55.

5.56.

5.57.

5.58.

5.59.

Adjuk meg a következő improprius integrálok értékét (ha léteznek):

5.60. $\int_{5}^{\infty} \frac{2}{x^3} dx$

5.61. $\int_{5}^{\infty} e^{-x} dx$

5.62. $\int_{0}^{1} \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$

5.63. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$

5.64.

5.65.

5.66.

5.67.

5.68.

6. Megoldások

1.1. $\lim \frac{4n+3}{2n+100} = \lim \frac{\frac{4n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{100}{n}} = \lim \frac{4+\frac{3}{n}}{2+\frac{100}{n}} = \frac{4+0}{2+0} = 2$

1.2. $\lim \frac{4n^2+3n+2}{2n+100} = \lim \frac{\frac{4n^2}{n}+\frac{3n}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{100}{n}} = \lim \frac{4n+3+\frac{2}{n}}{2+\frac{100}{n}} = \frac{+\infty+3+0}{2+0} = +\infty$

1.3. $\lim \frac{4n+3}{2n^2-100n} = \lim \frac{\frac{4n}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{100n}{n^2}} = \lim \frac{\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}{2-\frac{100}{n}} = \frac{0+0}{2-0} = 0$

1.4. $\lim \frac{4n^3+5n^2}{2n^3-100n^2} = \lim \frac{\frac{4n^3}{n^3}+\frac{5}{n}}{\frac{2n^3}{n^3}-\frac{100}{n}} = \lim \frac{4+\frac{5}{n}}{2-\frac{100}{n}} = \frac{4+0}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$

1.5. $\lim \frac{3n^2-5n^4}{4n^3+10n^4} = \lim \frac{\frac{3n^2}{n^4}-\frac{5n^4}{n^4}}{\frac{4n^3}{n^4}+\frac{10n^4}{n^4}} = \lim \frac{\frac{3}{n^2}-5}{\frac{4}{n}+10} = \frac{0-5}{0+10} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$

1.6. $\lim \frac{2n^5-4n^4+5n^3-2n^2+n+12}{3n^2-n^3-2n^4-4n^5} = \lim \frac{\frac{2n^5}{n^5}-\frac{4n^4}{n^5}+\frac{5n^3}{n^5}-\frac{2n^2}{n^5}+\frac{n}{n^5}+\frac{12}{n^5}}{\frac{3n^2}{n^5}-\frac{n^3}{n^5}-\frac{2n^4}{n^5}-\frac{4n^5}{n^5}} =$
$\lim \frac{2-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}+\frac{12}{n^5}}{\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}-4} = \frac{2-0+0-0+0+0}{0-0-0-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

1.7. $\lim \frac{1+2+3+...+n}{n^2-1} = \lim \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2-1} = \lim \frac{n\,(n+1)}{2\,(n+1)\,(n-1)} = \lim \frac{n}{2n-2} =$
$\lim \frac{1}{2-\frac{2}{n}} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$

1.8. $\lim \dfrac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n-1)} = \lim \dfrac{2\left(1+2+3+...+n\right)}{\frac{n(2n-1+1)}{2}} = \lim \dfrac{2\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim \dfrac{n+1}{n} =$
$\lim \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1} = \dfrac{1+0}{1} = 1$

1.9. $\lim \dfrac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3+n^2} = \lim \dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2\left(n+1\right)} = \lim \dfrac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6n^2\left(n+1\right)} = \lim \dfrac{2n+1}{6n} =$
$\lim \dfrac{2+\frac{1}{n}}{6} = \dfrac{2+0}{6} = \dfrac{1}{3}$

1.10. $\lim \left(\dfrac{5n+10}{5n}\right)^{3n+4} = \lim \left(\dfrac{(5n}{5n} + \dfrac{10}{5n}\right)^{3n+4} = \lim \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n+4} = \lim \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{4} =$
$\lim \left[\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n}\right]^{3}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{4} = \left[e^2\right]^3 (1)^4 = e^6$