# Befektetési stratégiák Kellyvel és Kálmánnal

Bihary Zsolt

Matematikai Modellalkotás Szeminárium, BME, 2015

# Egy Ortvay feladat

Tekintsük a következő egyszerű befektetési modellt

$$
\begin{tikzcd}
 & W_{t+1}=W_t\left(1+x_t\right) \\
W_t \arrow[ur, "p_t"] \arrow[dr, "1-p_t"'] & \\
 & W_{t+1}=W_t\left(1-x_t\right)
\end{tikzcd}
$$

Mekkora $x_t$ hányadát fektessük be a vagyonnak?

# Egy Ortvay feladat

Tekintsük a következő egyszerű befektetési modellt

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{p_t} & W_{t+1} = W_t(1+x_t) \\ W_t & & \\ & \xrightarrow{1-p_t} & W_{t+1} = W_t(1-x_t) \end{array}$$

Mekkora $x_t$ hányadát fektessük be a vagyonnak?

Hozam várható értéke:

$$\mathrm{E}\left[\frac{W_{t+1}-W_t}{W_t}\right] = (2p_t - 1)x_t$$

# Egy Ortvay feladat

Tekintsük a következő egyszerű befektetési modellt

$$W_t \xrightarrow{p_t} W_{t+1} = W_t(1 + x_t)$$

$$W_t \xrightarrow{1-p_t} W_{t+1} = W_t(1 - x_t)$$

Mekkora $x_t$ hányadát fektessük be a vagyonnak?

Hozam várható értéke:

$$\mathrm{E}\left[\frac{W_{t+1} - W_t}{W_t}\right] = (2p_t - 1)x_t$$

Legyen $p_t = 0{,}6$.
Futamidő = 1 év = 250 nap.
Válassz stratégiát!
$x_t = \{0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ \dots\ ;\ 0{,}8;\ 0{,}9\}$

# Kelly kritérium

Tehát $p_t = 0{,}6$ esetén az optimális stratégia: $x_t = 0{,}2$.

# Kelly kritérium

Tehát $p_t = 0,6$ esetén az optimális stratégia: $x_t = 0,2$.

Általában (Kelly kritérium): $x_t = 2p_t - 1$

Levezethető a várható *log-hozam* maximalizálásából

$$\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{W_{t+1}}{W_t}\right)\right]$$

# Kelly kritérium

Tehát $p_t = 0{,}6$ esetén az optimális stratégia: $x_t = 0{,}2$.

Általában (Kelly kritérium): $x_t = 2p_t - 1$

Levezethető a várható *log-hozam* maximalizálásából

$$\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{W_{t+1}}{W_t}\right)\right]$$

Ha ismerjük a $p_t$ valószínűséget minden pillanatban, akkor alkalmazhatjuk a Kelly-optimális stratégiát.
De valóságos esetben nem ismerjük, becsülnünk kell.

# Exponenciális Wiener modell

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma W_t\right)$$

# Exponenciális Wiener modell

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma W_t\right)$$

$$d\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right) = \mu_t\, dt + \sigma_t dW$$

# Exponenciális Wiener modell

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma W_t\right)$$

$$d\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right) = \mu_t\, dt + \sigma_t dW$$

Kelly kritérium az exponenciális Wiener modellben:

$$x_t = \frac{1}{2} + \frac{\mu_t}{\sigma_t^2}$$

# Paraméterbecslés Kálmán filterrel

$$\mu_t = (1-\alpha)\mu_{t-dt} + \alpha \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-dt}}\right) \qquad \tau_\mu = 1/\alpha$$

# Paraméterbecslés Kálmán filterrel

$$\mu_t = (1-\alpha)\mu_{t-dt} + \alpha \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-dt}}\right) \qquad \tau_\mu = 1/\alpha$$

$$\sigma_t^2 = (1-\beta)\sigma_{t-dt}^2 + \beta\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-dt}}\right)\right)^2 \qquad \tau_\sigma = 1/\beta$$

Ekvivalens egy exponenciálisan súlyozott futó átlaggal